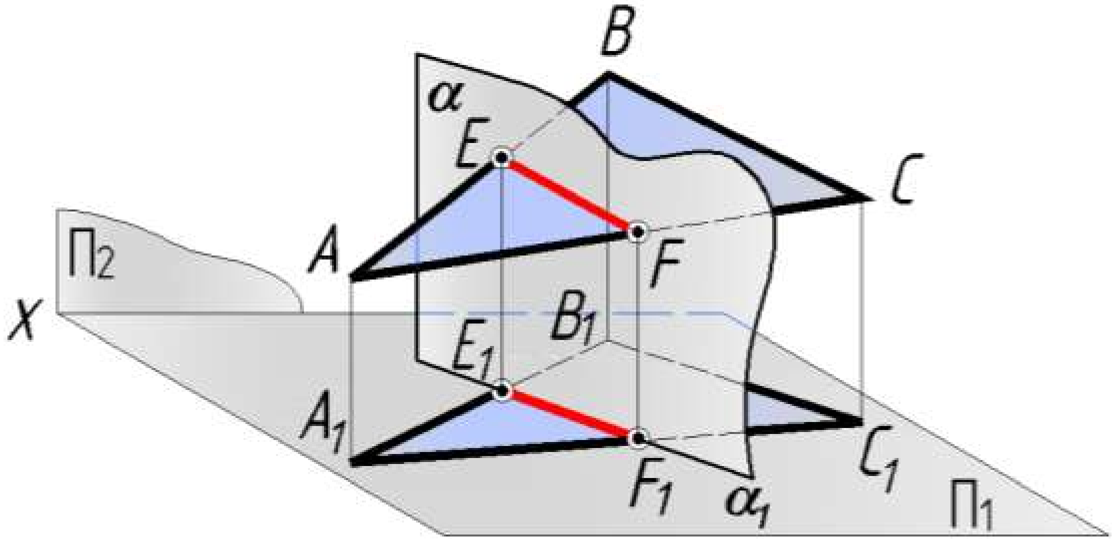
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Калмыцкий государственный университет

Начертательная геометрия

Точка, прямая, плоскость

Учебное пособие



Элиста, 2009

УDК 515(07)
ББК В151.34(2Рос.Калм)я73+В151.34я73
К 260

Карпань А.Т., Омшанов А.Б.
Начертательная геометрия. Точка, прямая, плоскость [Текст]: учебное пособие / А.Т.Карпань, А.Б.Омшанов. – Элиста: Изд-во КГУ. 2009. – 80 с.

Учебное пособие написано в соответствии с образовательными стандартами для студентов общетехнического профиля КГУ, где рассматриваются задачи и методические указания к их выполнению по темам теоретического курса «Начертательная геометрия». Теоретический материал, входящий в пособие изложен с использованием системы укрупненных дидактических единиц и является базой для подготовки студентов к решению геометро-графических инженерных задач.

В данном пособии представлены задачи для самостоятельного решения студентами и предъявления их на текущей и итоговой аттестации по дисциплине. Все чертежи выполняются с максимальной аккуратностью и точностью, с соблюдением всех требований государственных стандартов ЕСКД.

Научный руководитель – д.п.н., профессор Борликов Г.М.

Рецензенты:

Логинов А.Ю., заведующий кафедрой начертательной геометрии и графики Волжской государственной академии водного транспорта;

Каунов А.М., докт.техн.наук, профессор Волгоградского государственного педагогического университета;

Мамутова Л.Д., канд.пед.наук, доцент Южного федерального университета.

Заключение научно-методического Совета по начертательной, инженерной и компьютерной графике Федерального агентства по образованию. Председатель, докт.техн.наук, профессор Якунин В.И.

Принятые обозначения

1. Точки, расположенные в пространстве – прописными буквами латинского алфавита *A, B, C, D, E*, … или арабскими цифрами: 1, 2, 3, 4 … . Центр проецирования – S.
2. Прямые и кривые линии в пространстве, отнесенные к системе координат, – строчными буквами латинского алфавита: *a, b, c, d,* …, *l, m, n,* … . Линии уровня: *h* – горизонталь, *f* – фронталь, *p* – профильная прямая.
3. Заданные плоскости – строчными буквами греческого алфавита α, β, γ, δ, … . В круглых скобках, рядом с обозначением плоскости указывается способ ее задания, например: α (ABC), β (*l*, A).
4. Плоскости проекций – П' , $П_1$ – горизонтальная, $П_2$ – фронтальная, $П_3$ – профильная, $П_0$ – плоскость нулевого уровня в проекциях с числовыми отметками.
5. Прямоугольная система координат – 0xyz.
6. Углы – строчными буквами греческого алфавита: φ, ψ, ω… .
7. Следы плоскости обозначаются той же буквой , что и плоскость, но с добавлением подстрочного индекса, соответствующей плоскости проекций: $\alpha П_1$, $\alpha П_2$, $\alpha П_3$.
8. Несобственные элементы пространства обозначают соответствующей буквой с индексом – ∞ , например B':.
9. Символы, определяющие основные производимые операции: ∈ − взаимная принадлежность; ∉ − геометрические фигуры не принадлежат друг другу; ≡ − совпадение двух геометрических фигур; ≅ − фигуры конгруэнтны; ≠ − неравенство; → − геометрические фигуры отображаются, преобразуются; ⇒ − следует, если… , то … ; || − параллельность; ∦ − не параллельность; ⊥ − перпендикулярность; ∩ − пересечение двух геометрических фигур; ·_ − скрещивающиеся прямые; ^ − угол между геометрическими фигурами; Δ − разность параметров.

Введение

Начертательная геометрия – это раздел геометрии, который изучает методы изображения пространственных фигур на чертеже и алгоритмы решения задач: позиционных (задачи на взаимную принадлежность и пересечения геометрических фигур), метрических (задачи на определение расстояний и натуральных величин геометрических фигур) и конструктивных (построение геометрических фигур, их образов на чертеже, отвечающих заданным условиям). Чертеж – это своеобразный язык, с помощью которого, используя всего лишь точки, линии и ограниченное число геометрических знаков, букв и цифр, человек имеет возможность изобразить на поверхности, в частности на плоскости, геометрические фигуры или их сочетания (машины, приборы, здания, инженерные сооружения и т.д.). Благодаря начертательной геометрии появилась возможность изображать на плоскости рельеф поверхности земли и решать простыми графическими способами задачи, связанные с проектированием дорог, каналов, туннелей, а также определять объемы выполняемых при этом земляных работ.

Начертательная геометрия тесно связана с другими науками: физикой, математикой, механикой, кристаллографией, геодезией, специальными дисциплинами и т.д. Она развивает логическое мышление, пространственное представление и воображение, которое приобретается не сразу, а вырабатывается в процессе основательного изучения теоретического материала, самостоятельного решения задач и анализа уже решенных задач, при этом необходимо все построения мысленно представлять в пространстве. Совершенствуя нашу способность – по плоскому изображению мысленно создавать представление о форме предмета, начертательная геометрия готовит будущего инженера к успешному изучению специальных предметов и к техническому творчеству – проектированию.

Авторы выражают благодарность профессору Нартовой Л.Г. за ряд ценных замечаний, которые были учтены при окончательной подготовке рукописи к изданию.

1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ
1.1. Метод проекций

В основу построения любого изображения положена операция проецирования. В пространстве выбирают произвольную точку **S** – центр проецирования и точку **A –** объект проецирования. Чтобы спроецировать точку **A** на плоскость проекций **П′,** нужно провести из центра проецирования **S** проецирующий луч **SA** до пересечения с плоскостью **П′**. Полученная точка **A'** является изображением точки на плоскости проекций **П′.** Точку **A'** принято называть **центральной проекцией** точки **A** (рис.1).

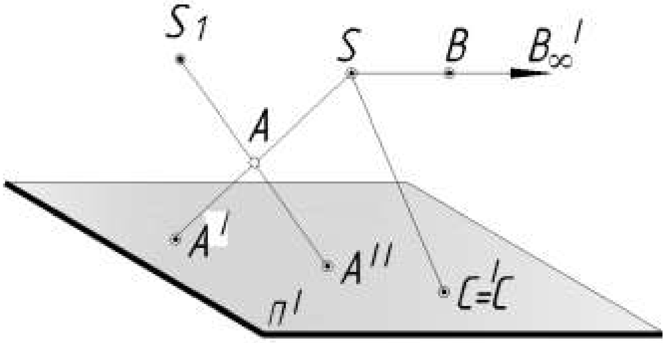


Рис.1

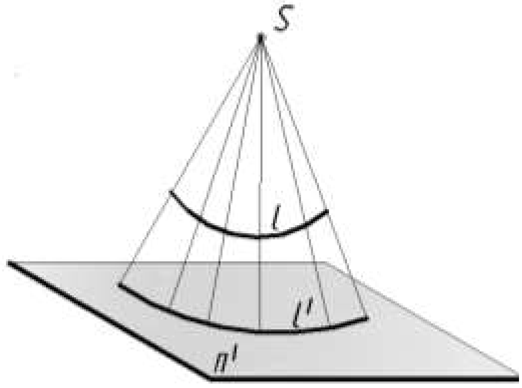


Рис.2

Если точка принадлежит плоскости проекций, то ее проекция совпадает с самой точкой (**C' ≡ C**).

Если проецирующий луч **SB** параллелен плоскости проекций П′, то проекцией точки B является несобственная точка B':.

Проецирующие лучи, проведенные через множество точек криволинейной фигуры **ι**, образуют коническую проецирующую поверхность, которая, пересекаясь с плоскостью проекций, дает проекцию фигуры **ι′**(рис.2).

Описанный метод проецирования называется **центральным.**

Широкое применение в практике получил случай, когда центр проецирования находится в бесконечности, при этом проецирующие лучи параллельны между собой (рис. 3, 4).

Метод назван методом **параллельного** проецирования, а проекции точек, фигур и тел – параллельными проекциями. В свою очередь, параллельные проекции подразделяются на **косоугольные** (рис. 3 и 4) и **прямоугольные** (рис. 5 и 6). В первом случае плоскость проекций с направлением проецирования образует угол, неравный 90°, во втором – этот угол равен 90°.

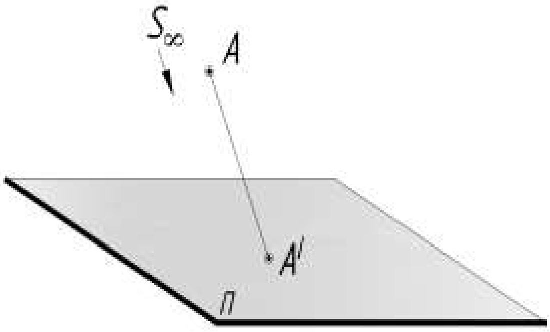


Рис. 3

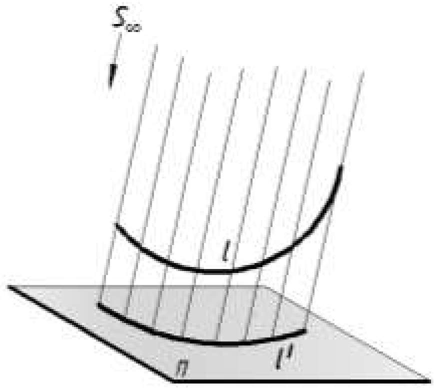


Рис. 4

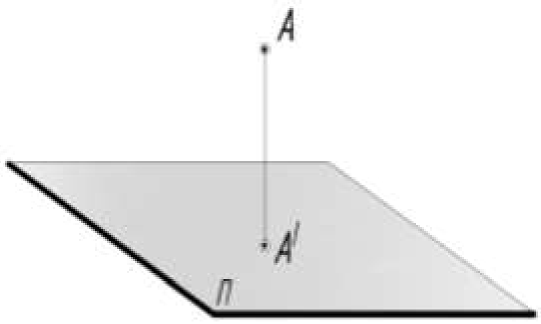


Рис.5

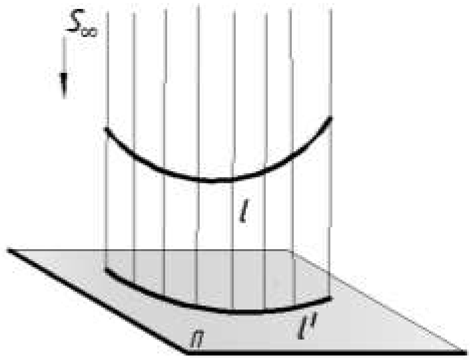


Рис.6

Построение изображения по заданному оригиналу – прямая задача начертательной геометрии. Однако на практике возникает необходимость решения обратной задачи, т.е. по проекционным изображениям определить форму и положение объекта в пространстве. Из чертежей видно, что не всякая операция проецирования позволяет решать обратную задачу. Зачастую, **одна проекция точки не определяет положение точки в пространстве.** Чтобы чертеж был обратим, необходимо получить как минимум две проекции точки. Для этого можно воспользоваться вторым центром проецирования $\mathbf{S_1}$ и построить вторую проекцию точки – **A''** (рис.1), что невозможно сделать при параллельном проецировании.

При прямоугольном параллельном проецировании для того, чтобы получить две проекции точки, французский геометр Гаспар Монж (1748 - 1818 г.г.) в 1798 году предложил систему координат, состоящую из двух взаимно перпендикулярных бесконечных и непрозрачных плоскостей, к которой и отнес некоторую точку **A** (рис. 7).

Для того, чтобы перейти от пространственной системы координат к плоскому чертежу, ученым было предложено совместить горизонтальную плоскость проекций $\mathbf{П_1}$ с вертикальной плоскостью, повернув ее вокруг оси ох на 90^o по часовой стрелке (рис.8). Такой чертеж получил название эпюра Монжа. Эпюр Монжа называется также комплексным чертежом, состоящего из двух или более связанных между собой проекций изображаемой фигуры.

Метод параллельного прямоугольного проецирования, изложенный Монжем, был и остается основным методом составления технических чертежей.

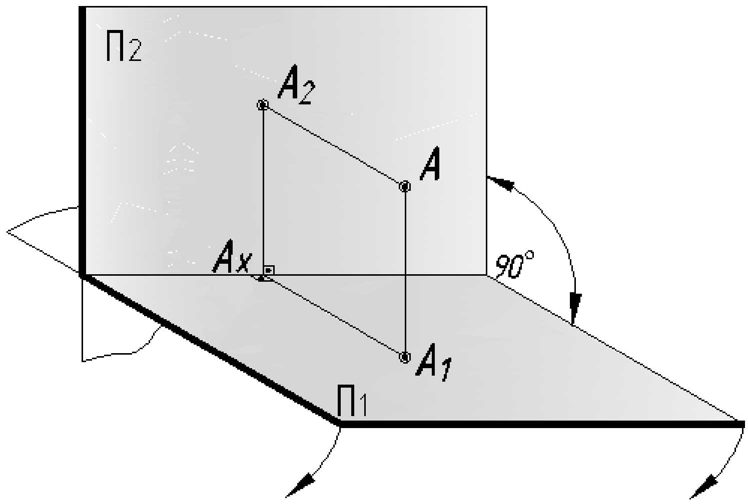


Рис.7

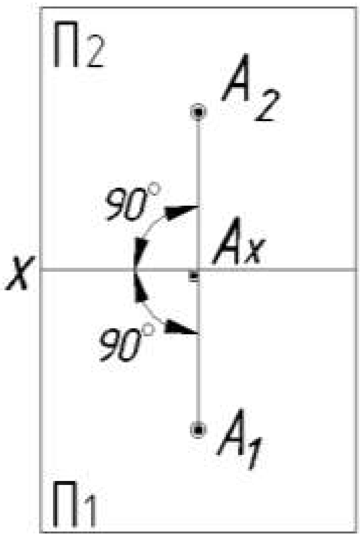


Рис. 8

1.2. Проецирование точки

Сущность метода ортогонального проецирования заключается в том, что предмет проецируется на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций лучами, перпендикулярными к этим плоскостям (рис. 7): $\mathbf{П_1}$ – горизонтальная плоскость проекций, $\mathbf{П_2}$ – фронтальная плоскость проекций. Линия пересечения плоскостей $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$ называется осью координат и обозначается **ox**. Плоскости проекций делят пространство на 4 двухгранных угла – **четверти (**или **квадранты)**. Принято, что наблюдатель находится в 1 четверти.

Ортогональной проекцией точки на плоскость проекций называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость.

A_1 – горизонтальная проекция точки А;

A_2 – фронтальная проекция точки А.

Разноименные проекции точки A_1 и A_2 на эпюре (рис.8) соединяются **линией проекционной связи**, перпендикулярной оси координат ox.

A_x – точка пересечения линии связи с осью ox.

Расстояние от точки А до $П_2$ есть координата $y = A A_2 = A_1 A_x$.

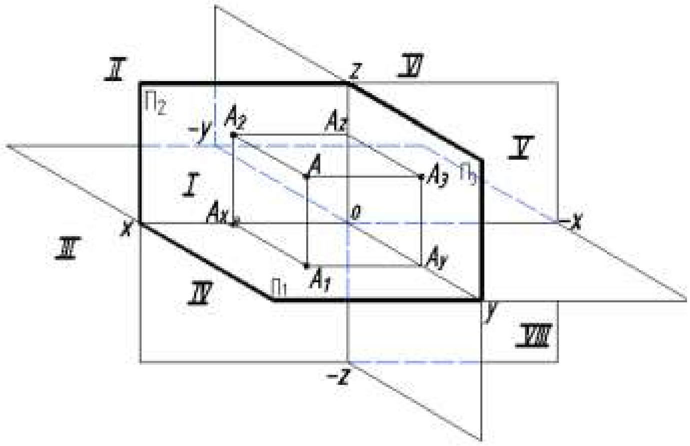
Расстояние от точки А до $П_1$ есть координата $z = A A_1 = A_2 A_x$.

Положение линии связи относительно оси x определяет координату x точки.

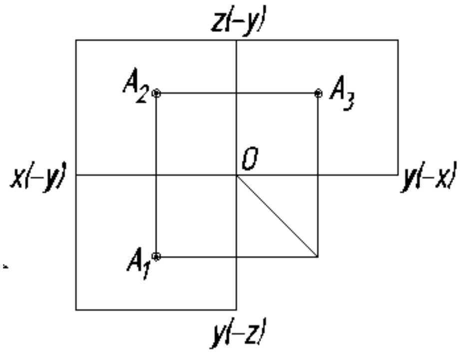
В практике изображения строительных конструкций, машин и различных инженерных сооружений возникает необходимость в создании дополнительных проекций. Поэтому используют ортогональную систему, состоящую из трех плоскостей проекций: горизонтальной $П_1$, фронтальной

$П_2$ и профильной $П_3$ (рис. 9). Плоскости проекций попарно пересекаются по осям координат ox, oy, oz. Положение точки устанавливают с помощью прямоугольных декартовых координат x, y, z.

Координату x называют абсциссой, она определяет расстояние от точки A до плоскости проекций $П_3$; координату y – ординатой – расстояние от точки A до плоскости проекций $П_2$; координату z – аппликатой – расстояние от точки A до плоскости проекций $П_1$. Итак, точка пространства A, отнесенная к системе координат, задается ее координатами A(x,y,z). **Координаты** – это числа, которые определяют положение точки в пространстве или на поверхности.



Пространственная декартовая система координат



Эпюр Г.Монжа

Рис. 9

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций делят пространство на 8 трехгранных углов – **октантов** (рис.9).

Если точка находится в первом октанте, то ее все три координаты положительные. В таблице 1 представлены знаки координат точки, находящейся в одном из 8 октантов.

Таблица 1

Октанты	Знаки координат		
	x	**y**	**z**
I	+	+	+
II	+	−	+
III	+	−	−
IV	+	+	−
V	−	+	+
VI	−	−	+
VII	−	−	−
VIII	−	+	−

1.3. Инвариантные свойства параллельного прямоугольного проецирования

Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования, называются независимыми или инвариантными относительно выбранного способа проецирования.

1. Параллельная проекция точки есть точка:

$$A \to A';$$

2. Параллельная проекция любой прямой (ι), не параллельной направлению проецирования (s) на плоскость Π′, есть прямая (ι′)(рис.10).

$$\iota \;\; (\iota \nparallel s) \to \iota';$$

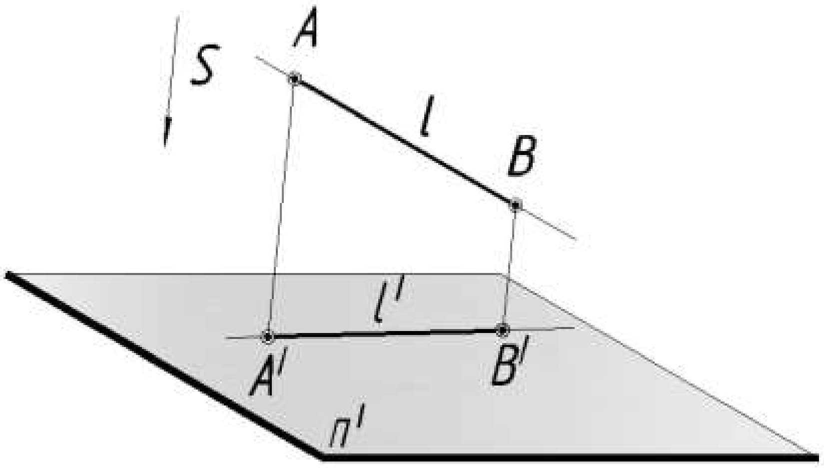


Рис. 10

3. Если множество N принадлежит множеству M, то параллельная проекция множества N′ принадлежит параллельной проекции множества M′ (рис.11).

$$N \in M \Rightarrow N' \in M';$$

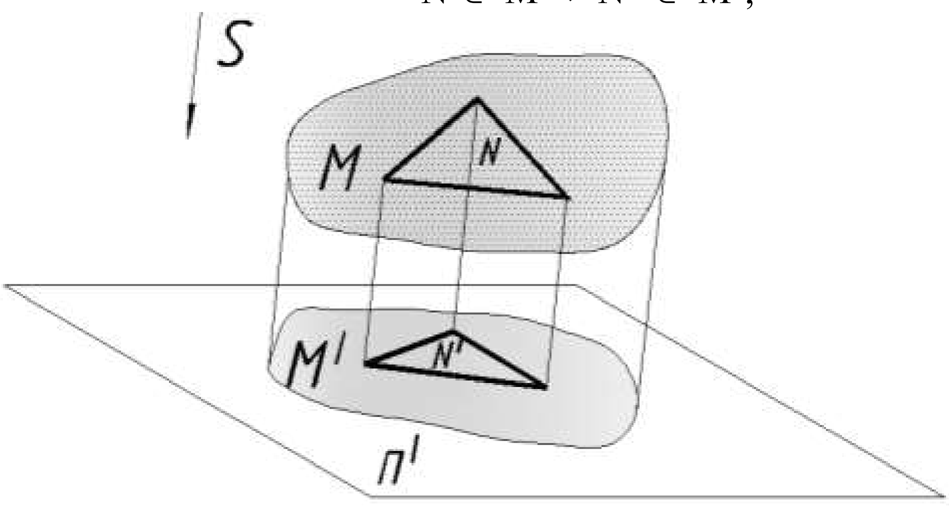


Рис.11

Применительно к геометрическим фигурам это свойство может быть записано:

– если точка A принадлежит линии m, то проекция точки A′ принадлежит проекции линии m′

$$A \in m \Rightarrow A' \in m';$$

– если линия m принадлежит поверхности β, то проекция линии m′ принадлежит проекции поверхности β′

$$m \in \beta \Rightarrow m' \in \beta';$$

– если точка A принадлежит поверхности β, то проекция точки A′ принадлежит проекции линии m′, принадлежащей проекции поверхности β′

$$A \in \beta \Rightarrow A' \in m' \in \beta';$$

– если фигура Ф принадлежит плоскости γ, параллельной плоскости проекции П′, то параллельная проекция этой фигуры Ф′ на плоскость конгруентна (проецируется на плоскость без искажения) самой фигуре Ф

$$(\Phi \in \gamma) \text{ и } (\gamma \parallel \Pi) \Rightarrow \Phi' \cong \Phi$$

Перечисленные свойства составляют теоретическую базу геометрических построений при параллельном проецировании геометрических фигур на плоскость и решении задач на эпюре Монжа.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите методы центрального и параллельного проецирования и их свойства.
2. В чем разница между косоугольным и прямоугольным проецированием?
3. В чем сущность ортогонального метода проецирования?
4. Что собой представляет ортогональная система координат?
5. Что называется осью проекций?
6. Что называется проекцией точки?
7. Что такое координата точки?
8. Какими координатами определяется каждая проекция точки?
9. Почему одна проекция не определяет положение точки в пространстве?
10. Что такое эпюр точки и как перейти от пространственного чертежа к эпюру?
11. Что такое линия связи и как она расположена относительно оси координат?

12. Где на эпюре лежат проекции произвольной точки, находящейся в первой четверти пространства, во второй, в третьей, в четвертой четверти пространства?
13. В каком случае проекция точки совпадает с самой точкой? Где располагаются две другие проекции этой точки?
14. Что характерно для всех точек горизонтальной плоскости проекций, фронтальной плоскости проекций, профильной плоскости проекций?
15. В каком октанте находится точка, если все ее координаты положительны? Отрицательны?
16. Укажите октанты, в которых две координаты имеют отрицательное значение?
17. Какие октанты имеют отрицательное значение оси у? Оси х? Оси z?
18. Как по двум заданным проекциям точки построить третью недостающую проекцию точки?
19. Как определить положение координатных осей, если известны три проекции точки?

Задача 1.

Построить три проекции точек по заданным координатам и указать в каком октанте находятся заданные точки или какой плоскости проекций принадлежат: A (35, -15, 27); B (20, 45, 15); C (-41, 6, -18); D (12, -50, -26); M (40, 0, 30); N (10, -25, 0); F (0, 0, 14).

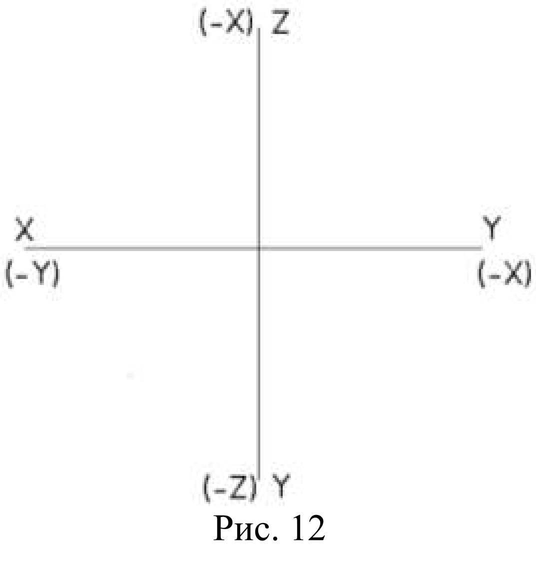


Рис. 12

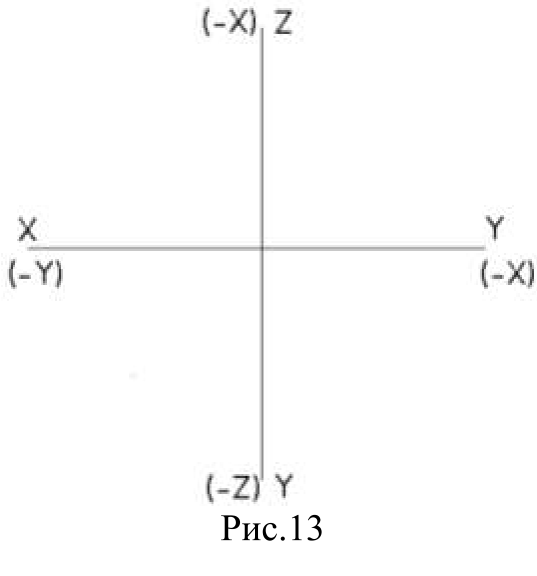


Рис.13

Задача 2.

Построить недостающие проекции заданных точек A и B. Определить координаты этих точек и указать в каком октанте они находятся или какой плоскости проекций принадлежат (рис. 14 – 19).

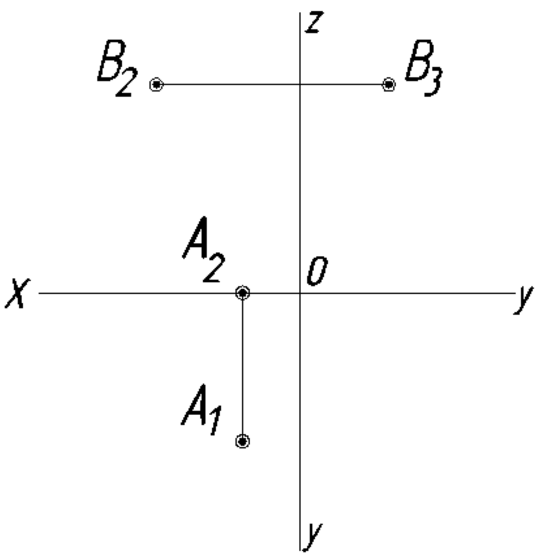


Рис.14

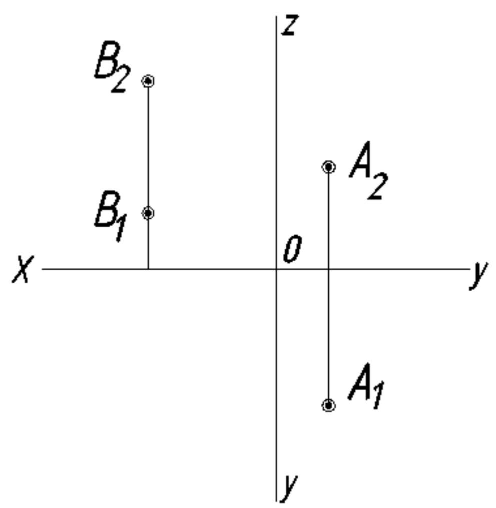


Рис.15

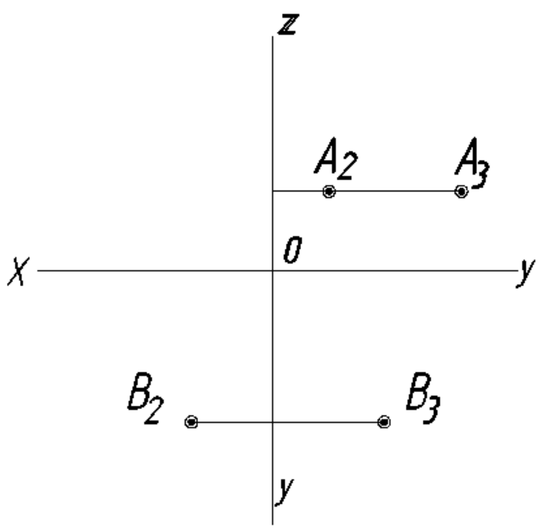


Рис.16

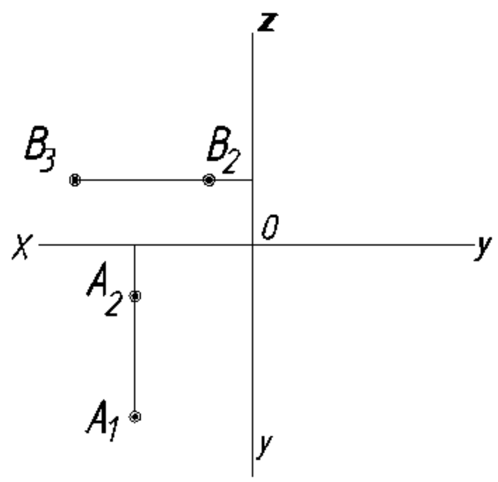


Рис.17

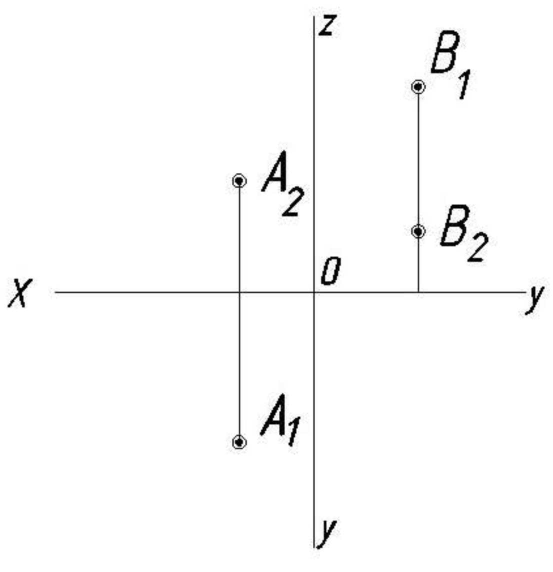


Рис. 18

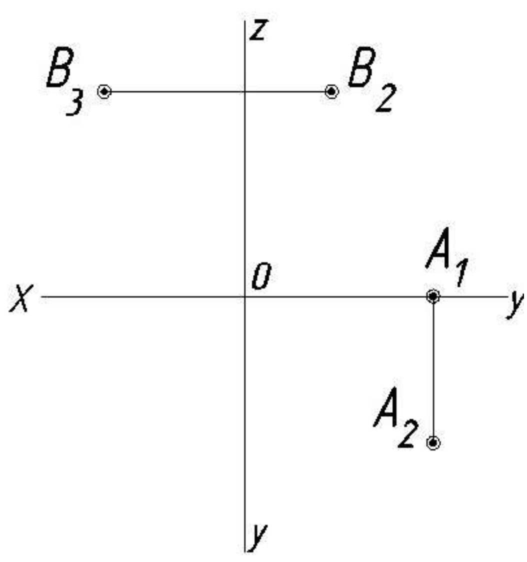


Рис.19

2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

2.1. Задание прямой линии

Положение прямой линии в пространстве определяется либо двумя точками, либо точкой и направлением. На рис. 20 прямая линия задана двумя действительными точками. Если одна из точек несобственная и находится в бесконечности, то прямая линия задается одной точкой и направлением (рис.21).

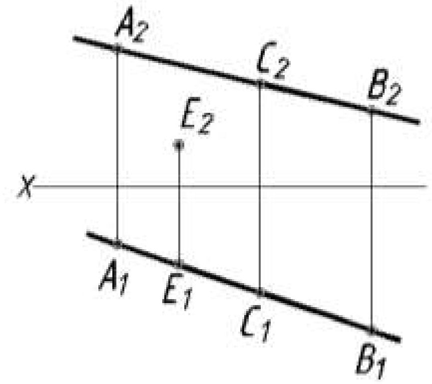


Рис.20

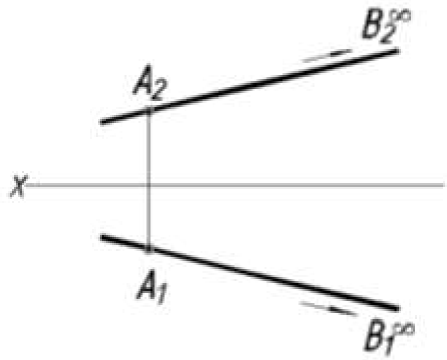


Рис.21

Прямая линия, наклоненная под произвольными углами ко всем плоскостям проекций, называется **прямой общего положения.**

Согласно свойству взаимной принадлежности можно утверждать: если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит соответствующей проекции прямой. На рис. 20:

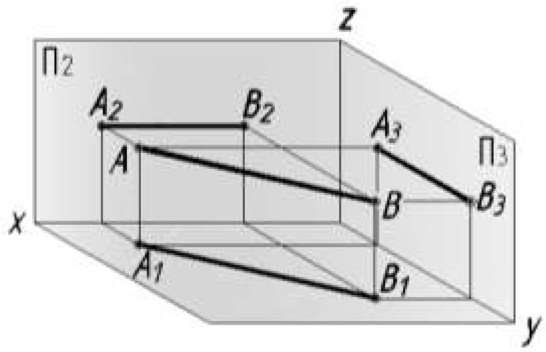
$$C \in AB, \text{т.к. } C_1 \in A_1B_1;\ C_2 \in A_2B_2;$$

$$E \notin AB, \text{т.к. } E_1 \in A_1B_1; \text{но } E_2 \notin A_2B_2$$

2.2. Частные случаи расположения прямой линии относительно плоскостей проекций

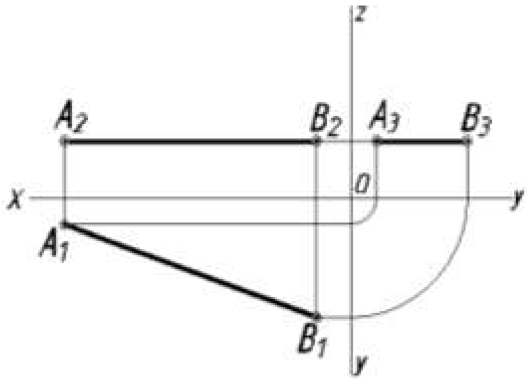
Прямые линии, параллельные плоскостям проекций, называются **прямыми уровня.**

Прямая линия, параллельная горизонтальной плоскости проекций (Π_1), называется **горизонталью** (рис.22). В этом случае, координаты z всех точек этой прямой равны, а, следовательно, фронтальная проекция горизонтали параллельна оси ох. Отрезок горизонтали проецируется на горизонтальную плоскость проекций Π_1без искажения (рис.23).



$AB \parallel \Pi_1$; $A_1B_1 = AB$;

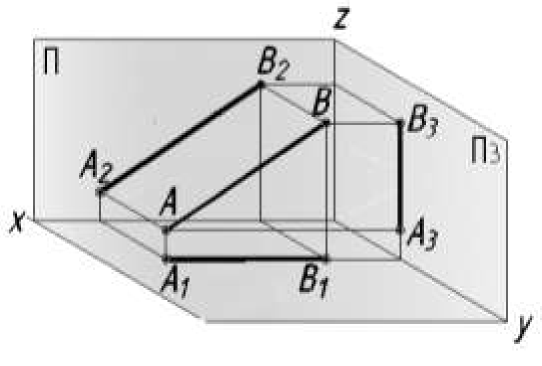
Рис. 22



$A_2B_2 \parallel ox$; $A_1B_1 = [AB]$;
$A_1B_1 \wedge ox = AB \wedge \Pi_2$;
$A_1B_1 \wedge oy = AB \wedge \Pi_3$

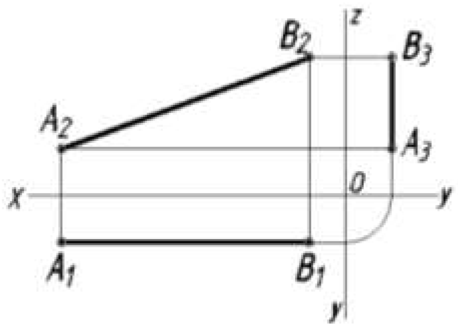
Рис.23

Прямая линия, параллельная фронтальной плоскости проекций (Π_2), называется **фронталью** (рис.24). Координаты y всех точек этой прямой равны. Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси ox и отрезок фронтали на фронтальную плоскость проекций проецируется без искажения (рис.25).



$AB \parallel \Pi_2$; $A_2B_2 = AB$;

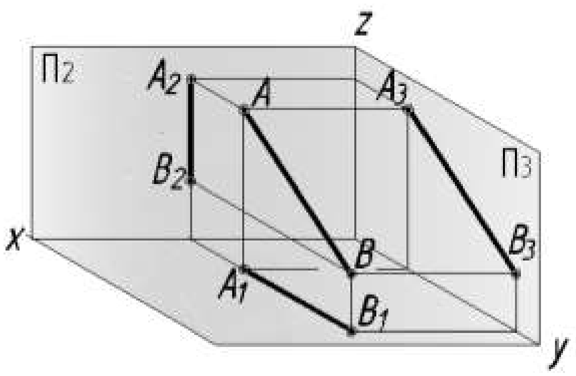
Рис.24



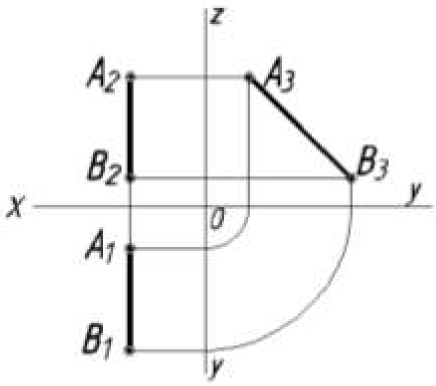
$A_1B_1 \parallel ox$; $A_2B_2 = [AB]$;
$A_2B_2 \wedge ox = AB \wedge \Pi_1$;
$A_2B_2 \wedge oz = AB \wedge \Pi_3$

Рис.25

Прямая линия, параллельная профильной плоскости проекций (Π_3), называется **профильной прямой** (рис.26). Координаты x всех точек прямой равны, а, следовательно, горизонтальная и фронтальная проекции прямой перпендикулярны оси ox. На профильную плоскость проекций отрезок профильной прямой проецируется без искажения (рис.27).



$AB \parallel П_3$; $A_3B_3 = [AB]$;



$A_1B_1 \perp ox$; $A_2B_2 \perp ox$;
$A_3B_3 = [AB]$;
$A_3B_3 \wedge oz = AB \wedge П_2$;
$A_3B_3 \wedge oy = AB \wedge П_1$

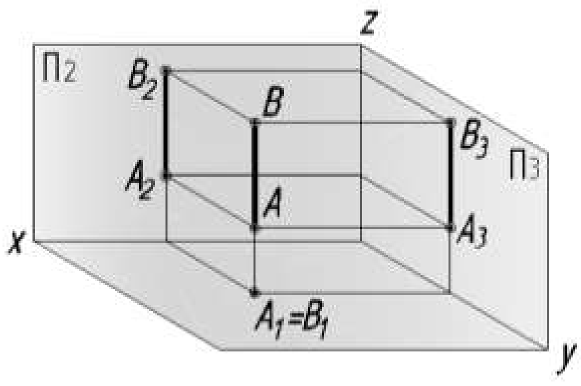
Рис.26

Рис.27

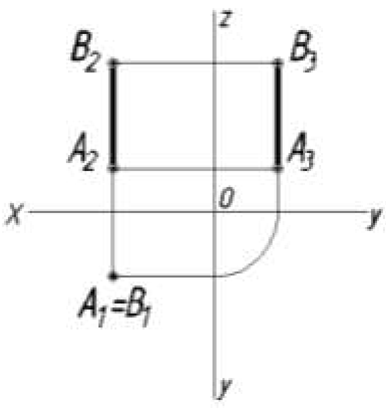
Прямые линии, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций, называются **проецирующими**.

Прямая линия, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций ($П_1$), называется **горизонтально-проецирующей** (рис.28).

На горизонтальную плоскость проекций ($П_1$) такая прямая линия проецируется в точку. Относительно двух других плоскостей проекций фронтальной $П_2$ и профильной $П_3$ она параллельна и проецируется на эти плоскости без искажения (рис.29).



$AB \perp П_1$; $AB \parallel П_2$; $AB \parallel П_3$

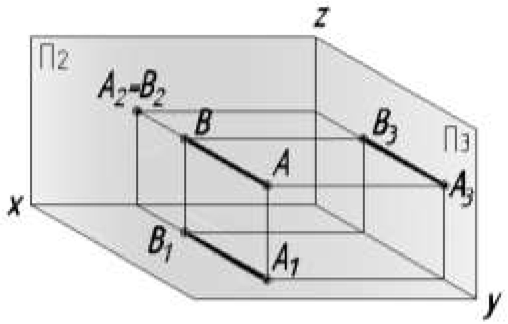


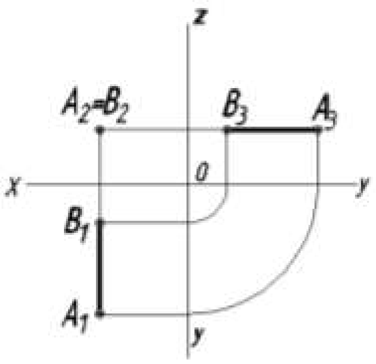
A_1B_1 – точка; $A_2B_2 \perp ox$;
$A_3B_3 \perp oy$

Рис.28

Рис.29

Прямая линия, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций ($П_2$), называется **фронтально-проецирующей** (рис.30). На фронтальную плоскость проекций ($П_2$) такая прямая линия проецируется в точку. Относительно двух других плоскостей проекций горизонтальной $П_1$ и профильной $П_3$ она параллельна и проецируется на эти плоскости без искажения (рис.31).





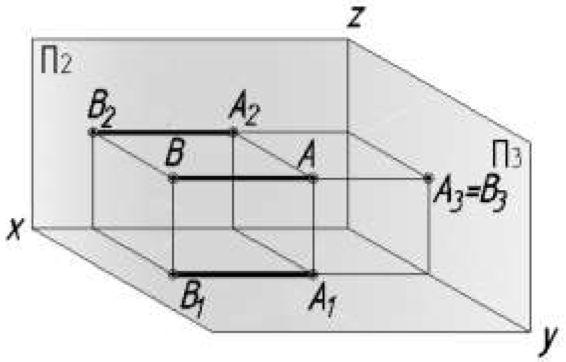
$AB \perp П_2$; $AB \parallel П_1$; $AB \parallel П_3$

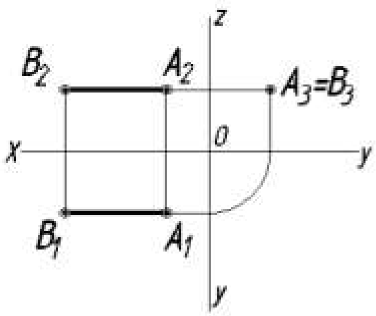
Рис.30

A_2B_2 – точка; $A_1B_1 \perp ox$;
$A_3B_3 \perp oz$

Рис.31

Прямая линия, перпендикулярная профильной плоскости проекций ($П_3$), называется **профильно-проецирующей** (рис.32). На профильную плоскость проекций ($П_3$) такая прямая линия проецируется в точку. Относительно двух других плоскостей проекций горизонтальной $П_1$ и фронтальной $П_2$ она параллельна и проецируется на эти плоскости без искажения (рис.33).





$AB \perp П_3$; $AB \parallel П_1$; $AB \parallel П_2$

Рис. 32

A_3B_3 – точка;
A_1B_1 и $A_2B_2 \parallel ox$

Рис.33

2.3. Определение длины отрезка прямой линии и углов наклона прямой к плоскостям проекций
(метод прямоугольного треугольника)

Очень часто при решении метрических задач (задачи, в которых определяются натуральные размеры элементов геометрических фигур) приходится определять действительную величину отрезка прямой линии. Если отрезок занимает частное положение относительно плоскостей проекций, а именно параллельное плоскости проекций, то эта проекция равна по величине самому отрезку (см. выше). В случае же, когда прямая линия занимает общее положение, ортогональные проекции отрезка такой прямой всегда меньше длины самого отрезка.

При прямоугольном проецировании отрезка прямой линии на плоскость можно выделить прямоугольный треугольник ABB**'** **(**рис.34**),** в котором один катет равен проекции отрезка ($AB' = A_1B_1$), второй катет равен разности координат концевых точек отрезка или разности расстояний концевых точек отрезка до плоскости $П_1$ ($z_A - z_B = \Delta z$), гипотенуза этого треугольника есть сам отрезок AB. Угол α определяет угол наклона отрезка прямой линии AB к горизонтальной плоскости проекций $П_1$. Зная все элементы треугольника его легко достроить на плоском чертеже к горизонтальной проекции отрезка и тем самым определить действительную величину отрезка и его угол наклона к горизонтальной плоскости проекций (рис.35).

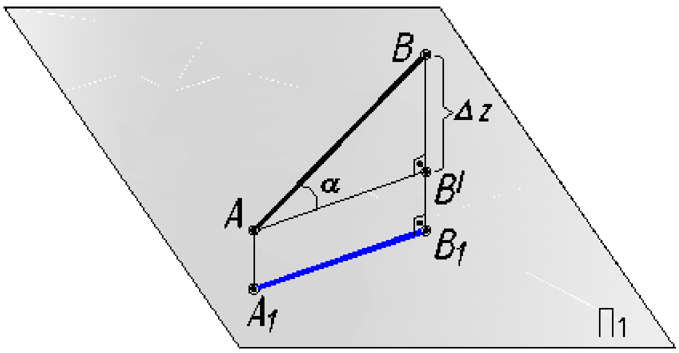


Рис. 34

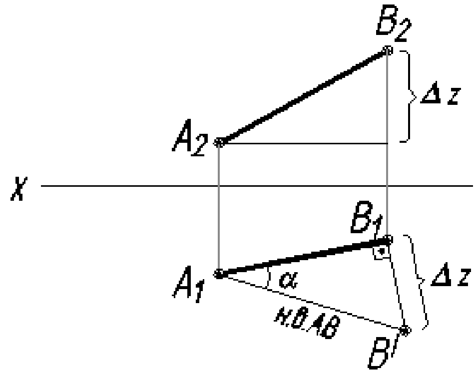
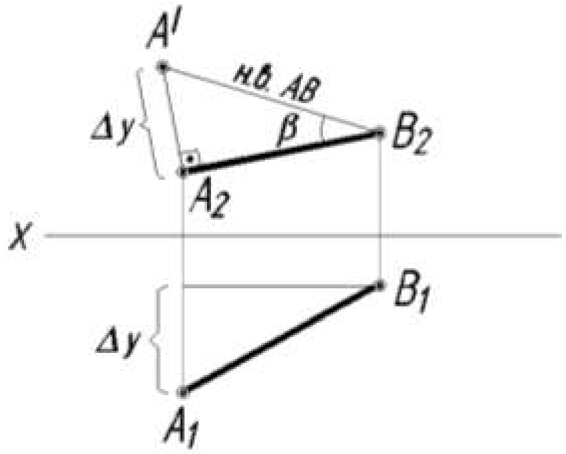


Рис. 35

$\Delta A_1B_1B'$ – прямоугольный; $B'B_1$ – разность координат концевых точек отрезка $\Delta z = zB - zA$; $A_1B' = [AB]$ – действительная величина отрезка; $\angle\alpha = AB \wedge П_1$.

Аналогично, прямоугольный треугольник можно достроить к фронтальной проекции отрезка, при этом второй катет равен разности координат Δy, т.е. разности расстояний концевых точек отрезка до фронтальной плоскости проекций $П_2$. В результате определяется действительная величина отрезка и угол наклона отрезка (β) к фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 36).



$\Delta A_2B_2A'$ – *прямоугольный;*
$A'A_2$ – *разность координат концевых точек отрезка*
$\Delta y = y_A - y_B$;
$A'B_2 = [AB]$ – *действительная величина отрезка;*
$\angle\beta = AB\hat{}\Pi_2$

Рис. 36

2.4. Следы прямой линии

Следом прямой линии называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций. В зависимости от того, с какой плоскостью проекций пересекается прямая линия, след прямой называется **горизонтальным, фронтальным или профильным.**

Каждый след является точкой, одновременно принадлежащей данной прямой и одной из плоскостей проекций, совпадает с одноименной своей проекцией, а, следовательно, одна из координат каждого следа должна быть равна нулю. На рис. 37 и 38 точка **M** – горизонтальный след, точка **N** – фронтальный след прямой.

$M \in \Pi_1 \Rightarrow M \equiv M_1 \Rightarrow M_2 \in ox$; $N \in \Pi_2 \Rightarrow N \equiv N_2 \Rightarrow N_1 \in ox$

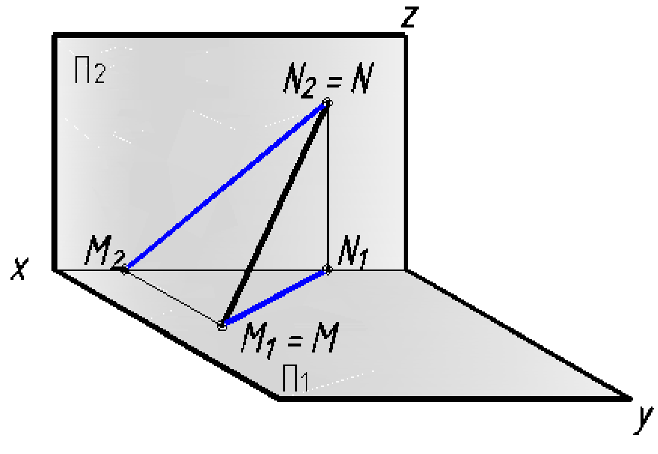


Рис.37

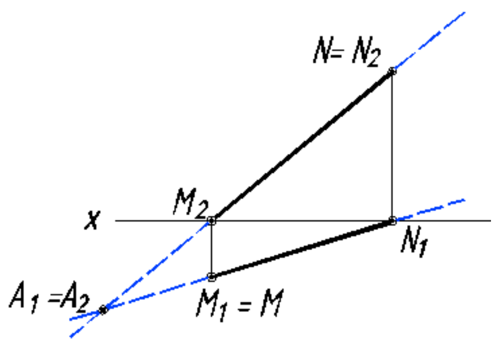


Рис. 38

Все это позволяет сформулировать правила построения следов на эпюре.

Для построения горизонтального следа (М) прямой линии необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с

осью ох и в этой точке восстановить к оси перпендикуляр (линию связи) до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.

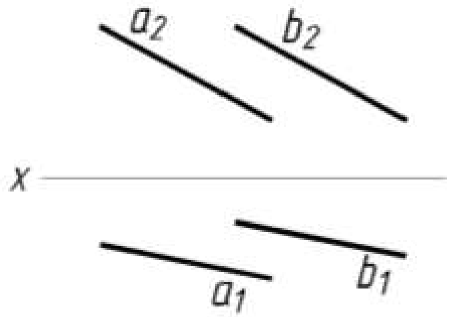
Для построения фронтального следа (N) прямой линии необходимо продолжить ее горизонтальную проекцию до пересечения с осью ох и в этой точке восстановить к оси перпендикуляр (линию связи) до пересечения с фронтальной проекцией прямой.

Следы прямой линии, являясь точками, в которых прямая линия переходит из одной четверти в другую, позволяют отмечать ее видимость. Видимой частью прямой будет та, которая расположена в пределах первой четверти или октанта. На рисунке 38 часть прямой слева от точки M находится в IV четверти, между точками M и N – в I четверти, справа от точки N – во II четверти.

2.5. Взаимное расположение двух прямых линий

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися. Они изображаются на эпюре следующим образом.

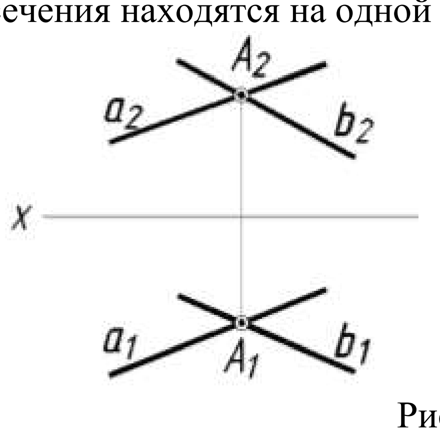
Параллельные прямые линии. Одноименные проекции параллельных прямых параллельны. Можно утверждать и следующее: прямые параллельны, если проекции этих прямых параллельны (рис. 39).



$$\left.\begin{array}{l} a_1 \parallel b_1 \\ a_2 \parallel b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Рис. 39

Пересекающиеся прямые линии. Одноименные проекции пересекающихся прямых линий пересекаются, и точки (A_1 и A_2) их пересечения находятся на одной линии связи (рис.40).



$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cap b_1 = A_1 \\ a_2 \cap b_2 = A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cap b = A$$

Рис. 40

Скрещивающиеся прямые линии. Если прямые линии не пересекаются и не параллельны друг другу, они называются скрещивающимися прямыми (рис.41). Точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной линии связи. Точки (A, B, C, D) скрещивающихся прямых, лежащих попарно на проецирующих прямых, называются *конкурирующими* или точками видимого пересечения и используются для определения видимости прямых линий. Видимость того или иного элемента объекта решается при этом для каждой проекции в отдельности.

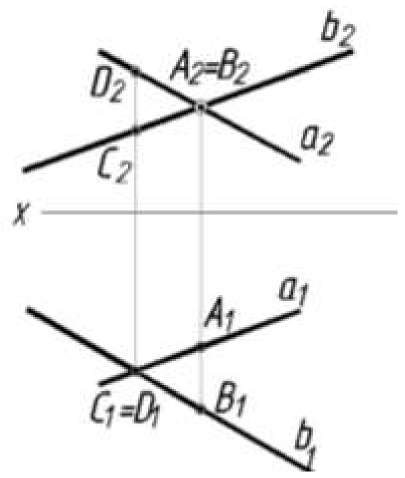


Рис. 41

$$a_2 \cap b_2 = (A_2 \equiv B_2)\,;\; A_1 \in a_1\,;\;\; B_1 \in b_1$$
$$a_1 \cap b_1 = (C_1 \equiv D_1);\;\; D_2 \in a_2\,;\;\; C_2 \in b_2$$
$$\Rightarrow \qquad a \;\dot{-}\; b$$

Координата z точки D больше, чем точки C, следовательно, прямая a в этом месте проходит над прямой b и будет видимой при взгляде сверху. Две другие совпадающие на фронтальной проекции точки A и B имеют разные координаты y. Координата y точки B больше, следовательно, прямая b в этом месте расположена ближе к наблюдателю и будет видимой при взгляде спереди.

2.6. Проецирование прямого угла

Если две прямые пересекаются под прямым углом, то проекции их в общем случае образуют угол, не равный 90°.

Для того, чтобы прямой угол проецировался без искажения на плоскость проекций, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была параллельна ей, а другая не перпендикулярна.

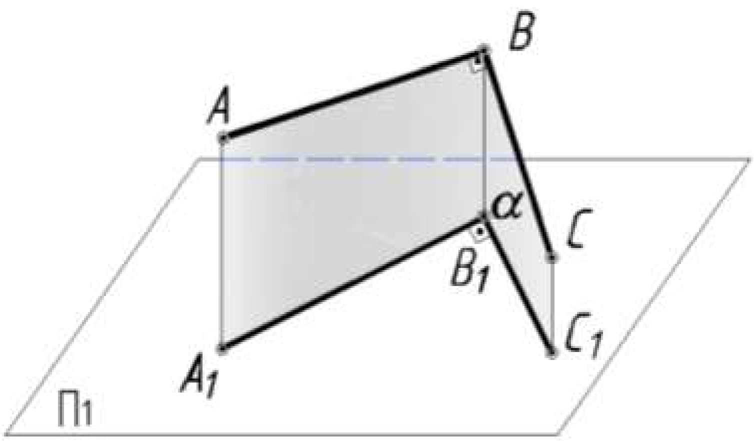
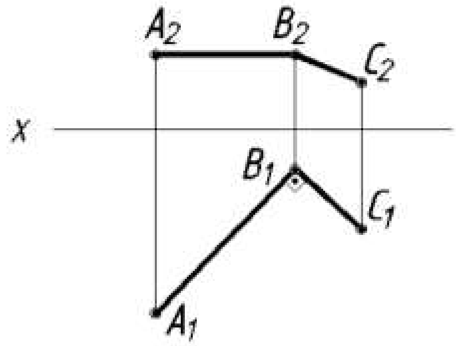


Рис. 42

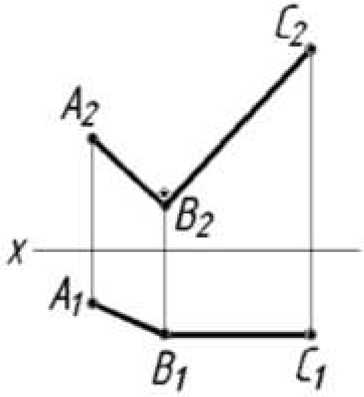
На рисунке 42 дано: $\angle ABC = 90°$ ($AB \perp BC$, при этом $AB \parallel \Pi_1$).
Докажем, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.
Прямая AB перпендикулярна плоскости α ($AB \perp \alpha$ **)**, т.к. $AB \perp BC$ (по условию); $AB \perp BB_1$ (BB_1 – проецирующий луч).
Т.к. $AB \parallel A_1B_1$ по условию, то $A_1B_1 \perp \alpha$**,** и, следовательно, $\boldsymbol{A_1B_1 \perp B_1C_1}$

Справедливо и обратное, если ортогональная проекция угла ABC на некоторую плоскость проекций является прямым углом и одна из сторон параллельна плоскости проекций, то в пространстве угол будет равен 90° (рис. 43 и 44).



$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 90°$
$AB \parallel \Pi_1$

Рис. 43



$\angle A_2B_2C_2 = \angle ABC = 90°$
$AB \parallel \Pi_2$

Рис. 44

Вопросы для самопроверки

1. Как задается прямая линия на чертеже?
2. Что такое прямая общего положения? В чем отличительные особенности эпюра, на котором отображена прямая общего положения от эпюра прямых частного положения?
3. В каком случае точка принадлежит прямой линии?
4. Какие прямые линии называются прямыми уровня; проецирующими? Перечислить и дать определение каждой, указать характерные особенности при проецировании их на плоскости проекций.
5. Что называется следом прямой линии? Какие бывают следы? Назовите последовательность построения горизонтального следа? Фронтального следа?
6. Перечислить прямые, имеющие в системе координат Π_1 и Π_2 только один след, и назвать – какой.

7. Как определить действительную величину отрезка прямой линии?
8. Как определить угол наклона прямой линии к горизонтальной плоскости проекций? К фронтальной плоскости проекций?
9. Как изображаются на ортогональном чертеже параллельные прямые? Пересекающиеся? Скрещивающиеся?
10. Могут ли проекции скрещивающихся прямых быть параллельными?
11. Как, используя конкурирующие точки определить видимость прямых линий?
12. В каком случае прямой угол проецируется на плоскость проекций без искажения?
13. В каком случае проекции прямого угла на плоскость $П_1$ и $П_2$ равны 90^o?

Задачи

Задача 1. Построить три проекции отрезка прямой линии, заданной двумя точками A(60; 20; 45), B (10; 50; -15). Построить точку C, делящую заданный отрезок в отношении 1: 3.
Определить действительную величину заданного отрезка AB.

Задача 2. Построить отрезок горизонтали длиной 48 мм, расположенную на расстоянии 15 мм от горизонтальной плоскости проекций $П_1$, под углом 30° к фронтальной плоскости проекций $П_2$. Одна из точек отрезка принадлежит фронтальной плоскости проекций $П_2$.

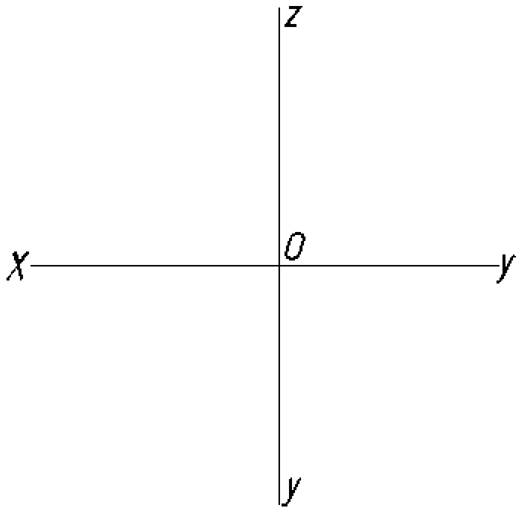


Рис. 45

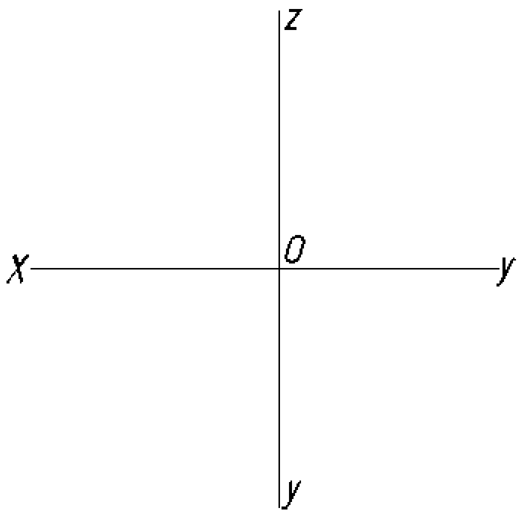


Рис.46

Задача 3. От точки А (7; 14; 0) построить отрезок прямой линии, принадлежащий фронтальной плоскости проекций, длиной 52 мм, под углом 40° к горизонтальной плоскости проекций. Как называется такая прямая?

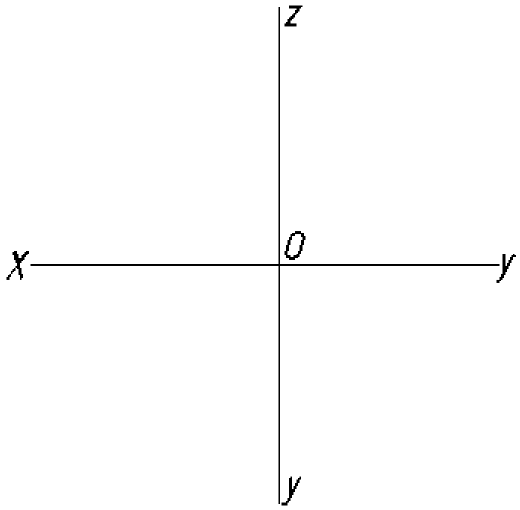


Рис.47

Задача 4. Построить чертеж в трех проекциях отрезка профильно-проецирующей прямой длиной 45 мм, находящейся на расстоянии 12 мм от горизонтальной плоскости проекций $П_1$ и 30 мм от фронтальной плоскости проекций $П_2$.

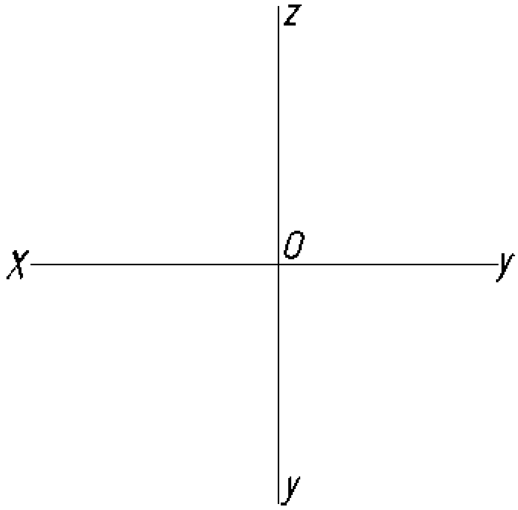


Рис.48

Задача 5. Построить эпюр отрезка горизонтально-проецирующей прямой длиной 53 мм на расстоянии 35 мм от плоскости $П_2$ и 10 мм от плоскости $П_3$.

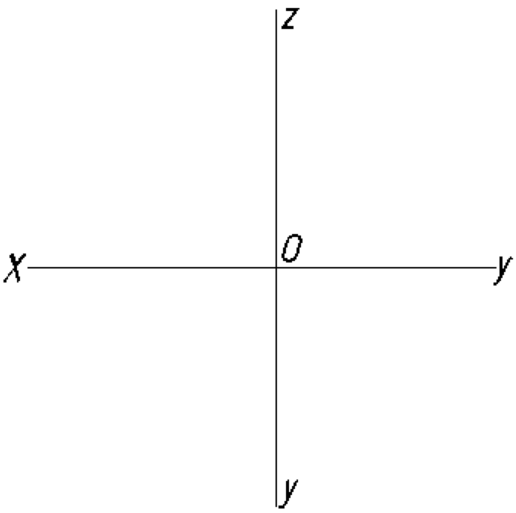


Рис.49

Задача 6. На прямой, определяемой точками А(10; 30; 10) и В(60; 10; 50), построить отрезок АС длиной 45 мм.

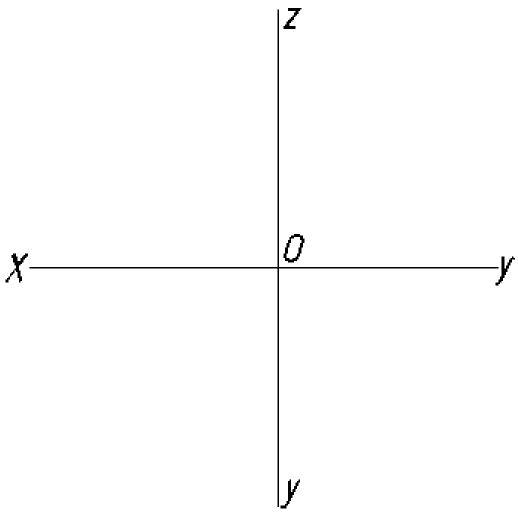


Рис.50

Задача 7. Построить следы прямой линии *b* (рис. 51 - 54). Определить через какие четверти пространства она проходит? Определить действительную величину отрезка прямой, ограниченного двумя следами.

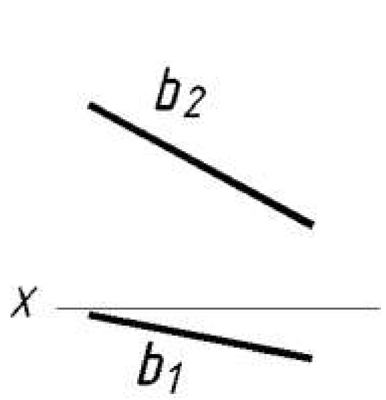


Рис.51

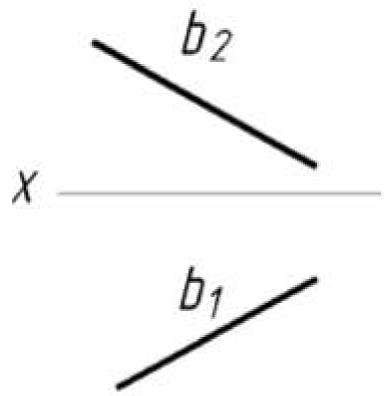


Рис.52

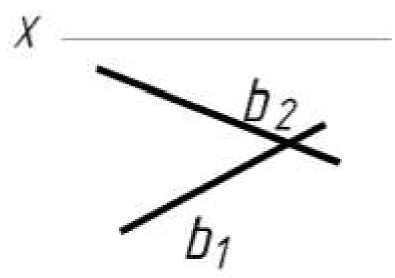


Рис.53

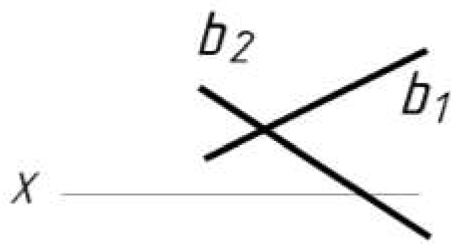


Рис.54

Задача 8. Построить проекции прямой по заданным ее следам: *M* – горизонтальный след, *N* – фронтальный след (рис.55 и 56).

Рис.55

Рис.56

Задача 9. Через заданную точку *C* провести прямую линию, параллельную прямой *a* (рис.57), а через точку *D* провести прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций и пересекающую прямую *a* (рис.58).

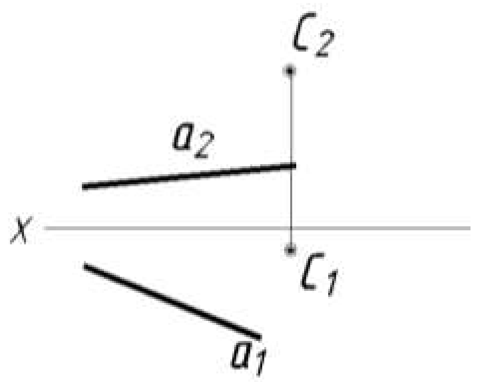


Рис.57

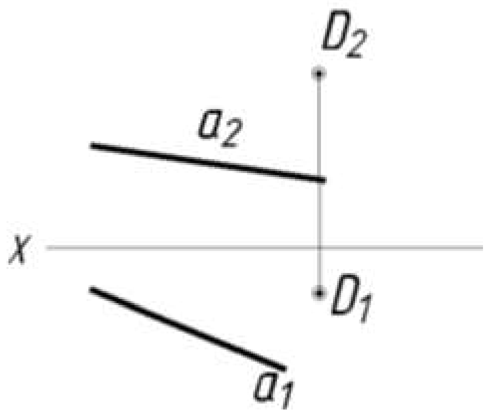


Рис.58

Задача 10. Прямые АВ и СD пересечь горизонталью (рис.59), фронталью (рис.60).

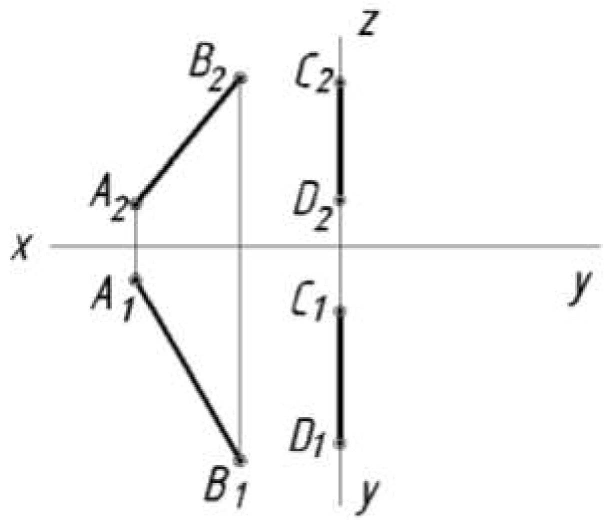


Рис.59

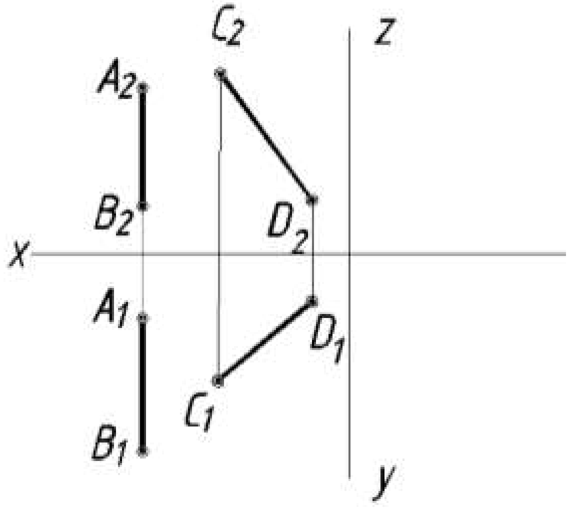


Рис.60

Задача 11. Определить взаимное расположение прямых АВ и СD (рис.61 - 62).

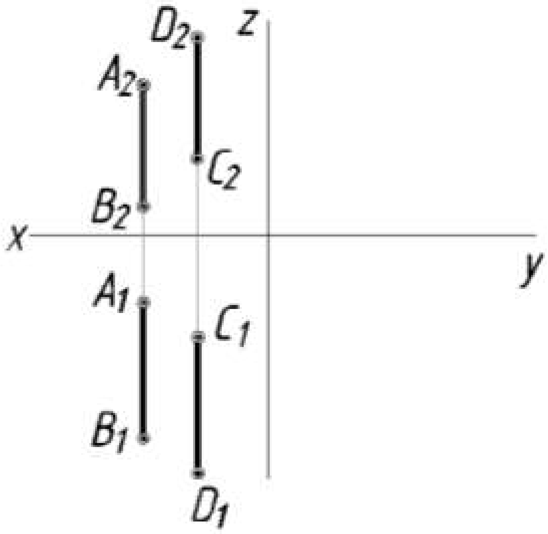


Рис.61

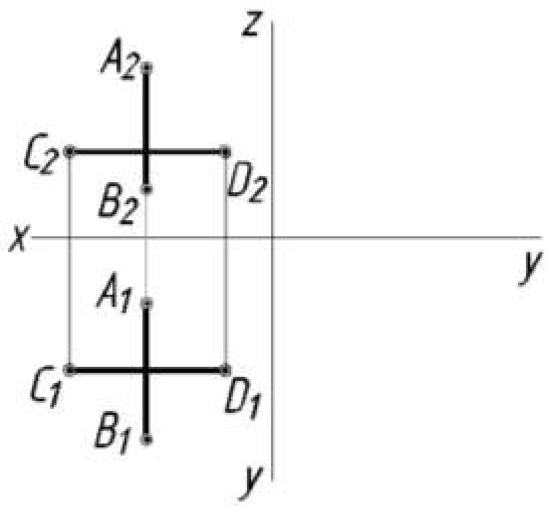


Рис.62

Задача 12. Из точки *C* восстановить перпендикуляр к прямой *a* (рис.63).

Задача 13. Определить расстояние от точки *D* до прямой *a* (рис.64).

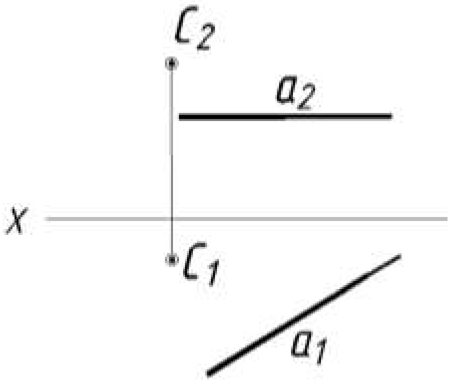


Рис.63

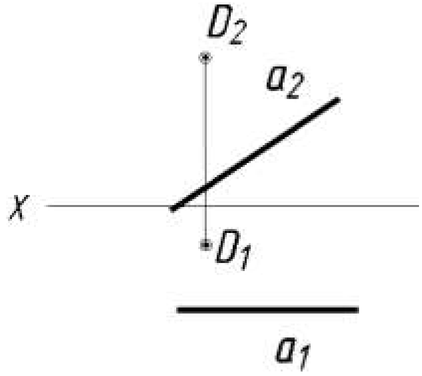


Рис.64

Задача 14. Определить недостающую проекцию точки *C*, исходя из условия, что расстояние от точки *C* до прямой *m* равно 35 мм (рис.65). Сколько решений возможно.

Задача 15. Дана прямая *m*, параллельная горизонтальной плоскости проекций, и фронтальная проекция прямой *AB*, перпендикулярной *m*. Построить прямоугольник *ABCD* с основанием *BC* на прямой *m*, исходя из условия, что его длина равна 1,5*AB* (рис.66).

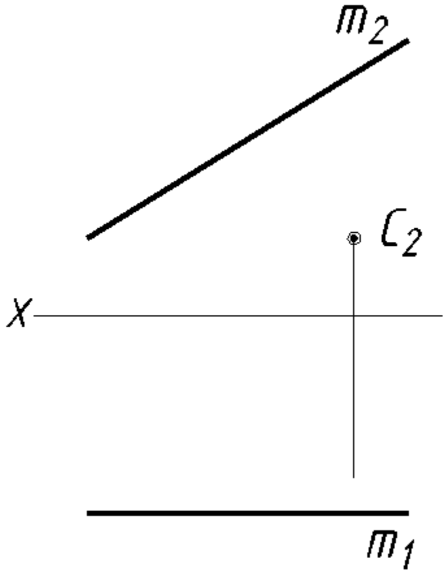


Рис.65

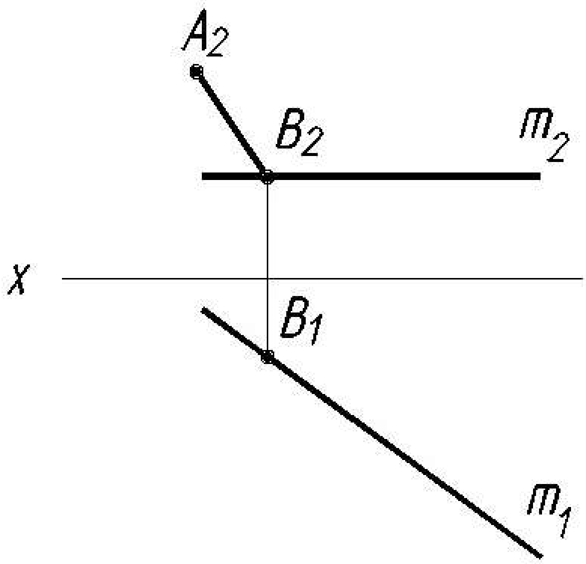


Рис.66

3. ПЛОСКОСТЬ
3.1. Способы задания плоскости

Плоскость, как геометрическую фигуру, следует представить себе простирающейся неограниченно во все стороны.

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется тремя различными точками, не принадлежащими одной прямой.

Рассмотрим изображение плоскости на комплексном чертеже.

Плоскость задается:

- Проекциями трех точек, не лежащими на одной прямой (рис.67);
- Прямой и точкой, в случае, если две точки собственные, а одна – несобственная (рис.68);
- Двумя пересекающимися прямыми, если одна точка собственная, две – несобственные (рис.69);
- Отсеком произвольной формы (треугольник, окружность, эллипс, прямоугольник, многоугольник и т.д.) (рис.70);
- Двумя параллельными прямыми линиями (рис.71);
- Следами плоскости (рис.72). ***Следом плоскости называется прямая линия, полученная в результате пересечения заданной плоскости с плоскостью проекций.***

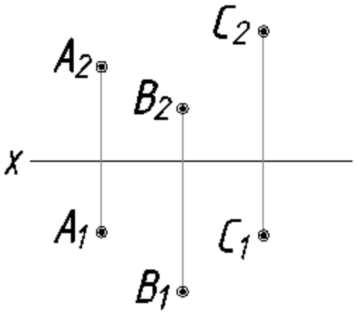


Рис.67

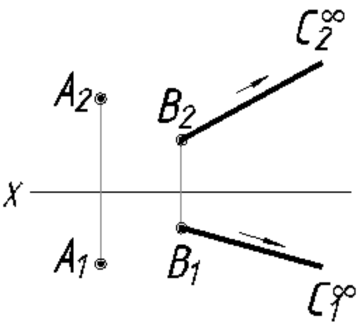


Рис.68

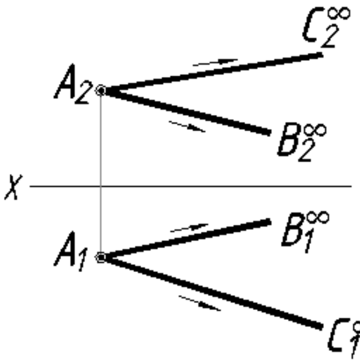


Рис.69

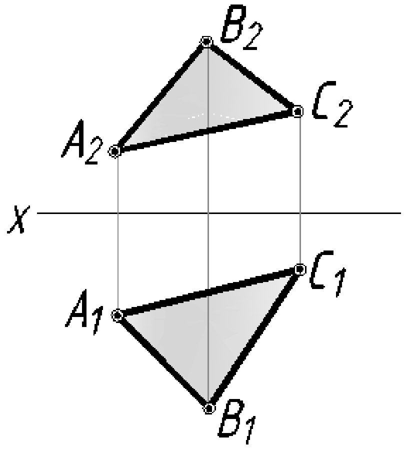


Рис.70

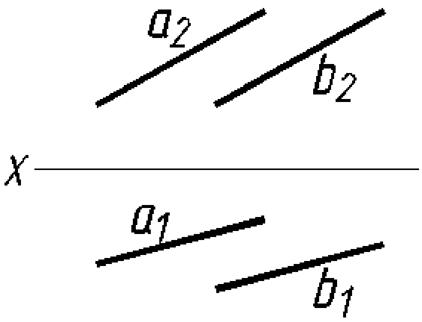


Рис.71

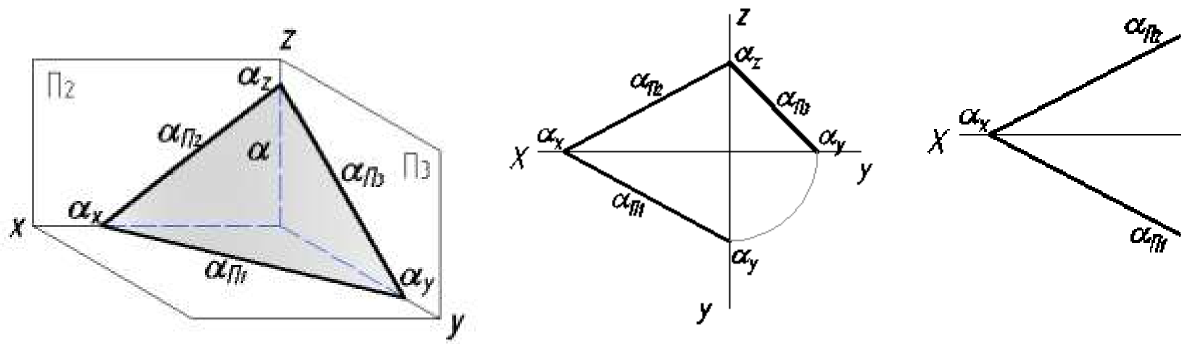


Рис. 72

Следы плоскости попарно пересекаются на осях координат в точках $\boldsymbol{\alpha_x}$; $\boldsymbol{\alpha_y}$; $\boldsymbol{\alpha_z}$, которые называются ***точками схода***.

Каждый из следов совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие разноименные проекции оказываются лежащими на осях системы координат.

3.2. Построение следов плоскости

Каждый след плоскости представляет собой прямую, для построения которой нужно знать либо две точки, либо одну точку и направление.

Двумя точками, с помощью которых определяется положение следов плоскости, могут быть одноименные следы двух прямых, принадлежащих данной плоскости.

Задача 1

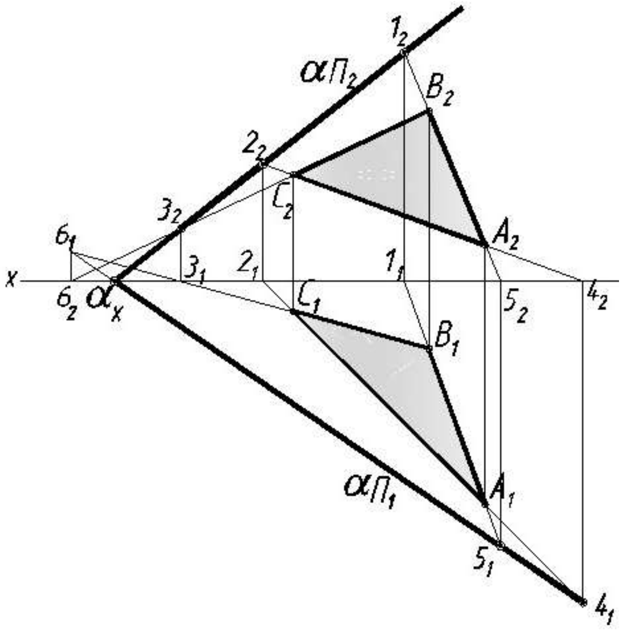


Рис.73

Задача 2

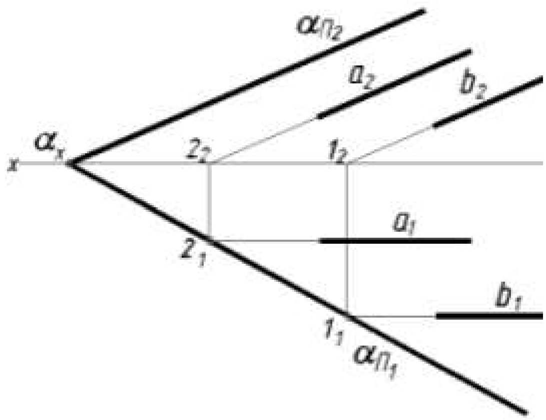


Рис.74

Задача 1. Точки 1, 2 и 3 являются фронтальными следами прямых соответственно АВ, АС и ВС плоскости АВС, через которые и проходит фронтальный след заданной плоскости. Точки 4, 5, 6 – горизонтальные следы прямых АС, АВ и ВС заданной плоскости, через которые проходит горизонтальный след плоскости АВС. α_x – точка схода (рис.73).

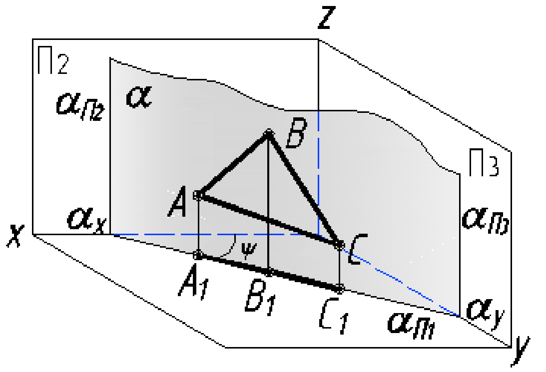
Задача 2. Плоскость α задана двумя параллельными прямыми a и b, которые в свою очередь параллельны фронтальной плоскости проекций Π_2 (фронтали). Горизонтальный след плоскости пройдет через точки 1 и 2 – горизонтальные следы прямых a и b. Фронтальный след принадлежит фронтальной плоскости проекций и является фронталью нулевого уровня, поэтому фронтальный след плоскости пройдет через точку схода α_x параллельно фронталям a и b плоскости (рис.74).

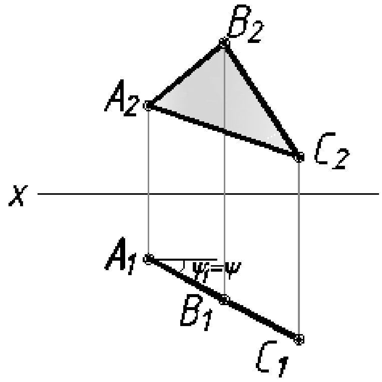
3.3. Различные положения заданной плоскости относительно плоскостей проекций

Плоскость, произвольно наклоненная к плоскостям проекций, называется плоскостью **общего положения.** Она не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций (рис.67-72).

Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций, называются проецирующими.

Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, называется **горизонтально-проецирующей** (рис.75).





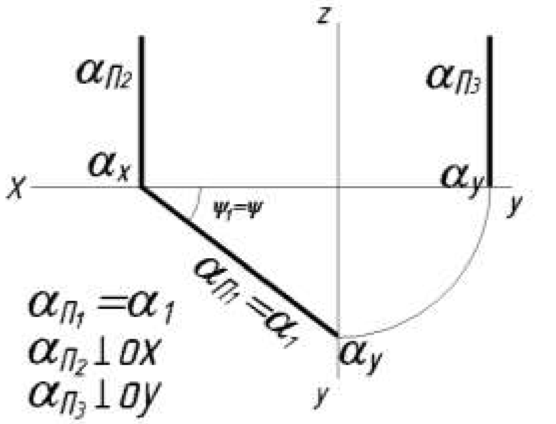


Рис.75

На горизонтальную плоскость проекций $П_1$ заданная плоскость $\alpha(ABC)$ в условиях прямоугольного проецирования отображается в прямую $A_1B_1C_1$. Горизонтальный след совпадает с горизонтальной проекцией плоскости ($\alpha П_1 = \alpha_1$). Угол наклона ψ плоскости $\alpha(ABC)$ к фронтальной плоскости проекций $П_2$ на горизонтальную плоскость проекций $П_1$ проецируется без искажения.

Плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $П_2$, называется **фронтально-проецирующей** (рис.76).

На фронтальную плоскость проекций $П_2$ заданная плоскость $\alpha(ABC)$ в условиях прямоугольного проецирования отображается в прямую $A_2B_2C_2$. Фронтальный след плоскости совпадает с фронтальной проекцией плоскости ($\alpha П_2 \equiv \alpha_2$). Угол наклона φ плоскости $\alpha(ABC)$ к горизонтальной плоскости проекций $П_1$ на фронтальную плоскость проекций $П_2$ проецируется без искажения.

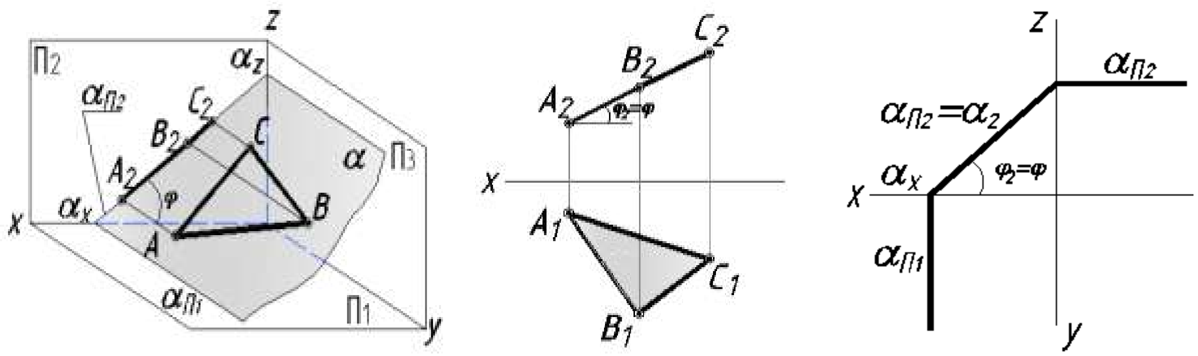


Рис. 76

Плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций $П_3$, называется **профильно-проецирующей** (рис.77).

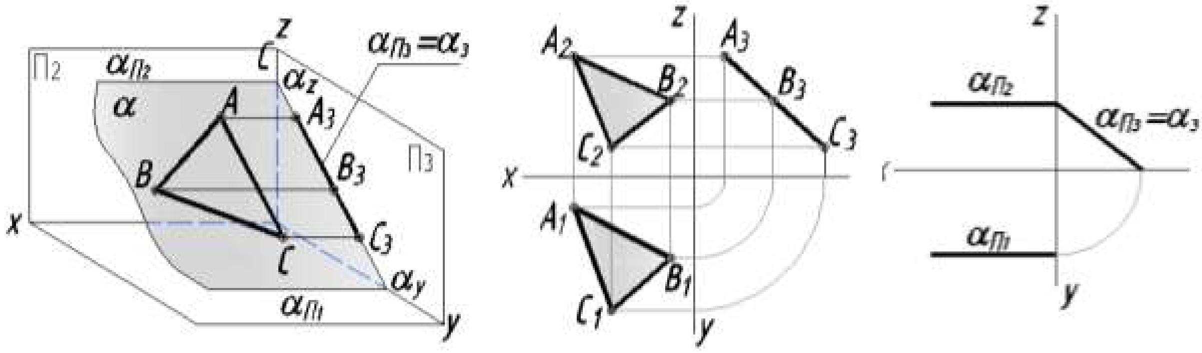


Рис. 77

На профильную плоскость проекций $П_3$ заданная плоскость α(ABC) в условиях прямоугольного проецирования отображается в прямую $A_3B_3C_3$. Профильный след плоскости совпадает с профильной проекцией плоскости ($\alpha П_3 \equiv \alpha_3$). Углы наклона плоскости α(ABC) к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций на профильную плоскость проекций $П_3$ проецируются без искажения.

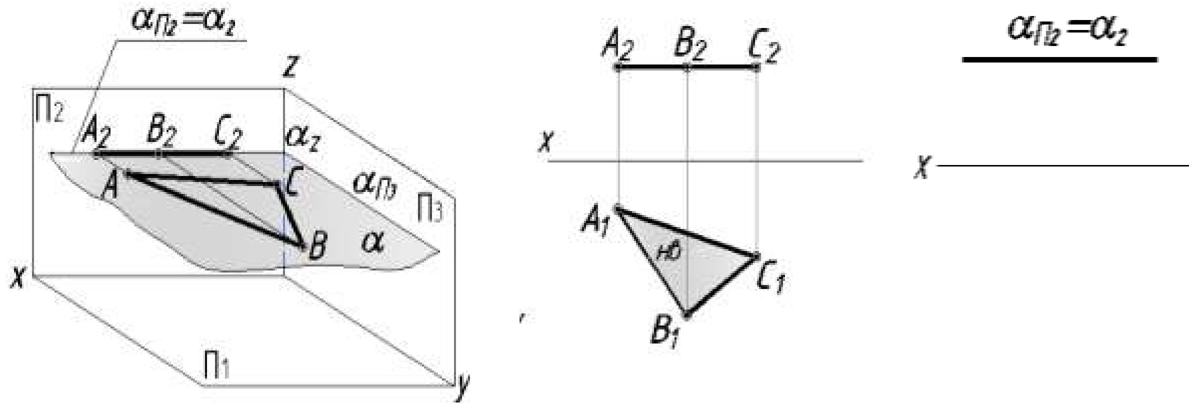
Плоскости, параллельные плоскостям проекций, называются плоскостями уровня.

Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций $П_1$, называется **горизонтальной (**рис.78**)**.

Любая фигура, расположенная в плоскости α проецируется без искажения на плоскость $П_1$.

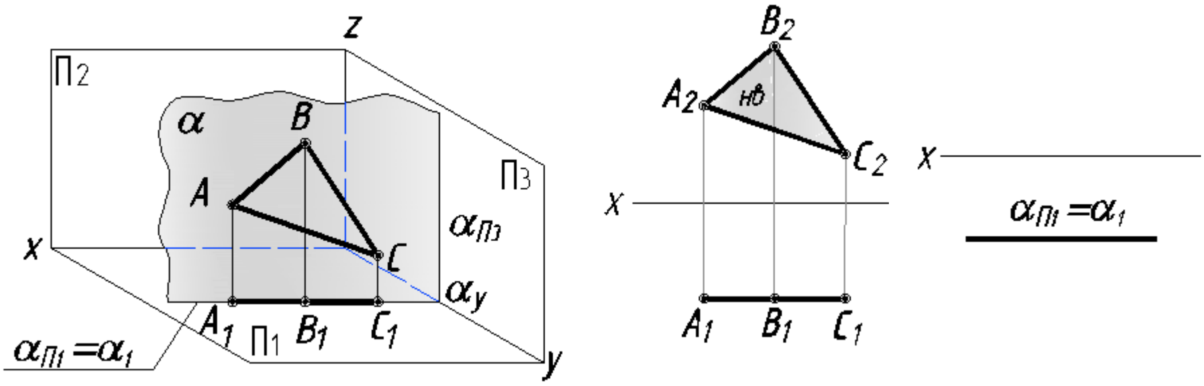
Плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$, называется **фронтальной** (рис.79).

Любая фигура, расположенная в плоскости α**,** на плоскость $П_2$, проецируется без искажения.



$A_2B_2C_2 \parallel OX$; $A_1B_1C_1 = ABC$; $\alpha П_2 \equiv \alpha_2 \parallel OX$

Рис.78

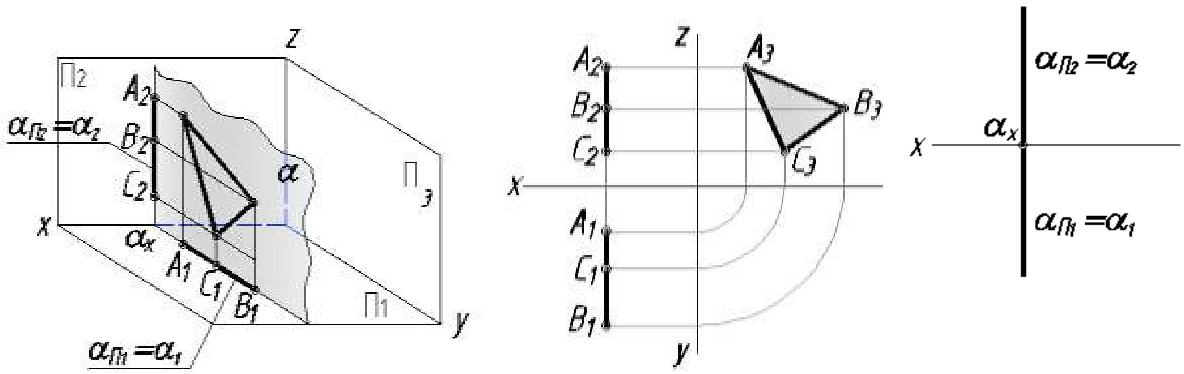


$A_1B_1C_1 \parallel OX$; $A_2B_2C_2 = ABC$; $\alpha\Pi_1 = \alpha_1 \parallel OX$

Рис.79

Плоскость, параллельная профильной плоскости проекций Π_3, называется **профильной** (рис.80).

Любая фигура, расположенная в плоскости **α,** на плоскость Π_3 проецируется без искажения.



$A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2 \perp OX$; $\alpha\Pi_1 = \alpha_1 \perp OX$; $\alpha\Pi_2 = \alpha_2 \perp OX$; $A_3B_3C_3 = ABC$;

Рис.80

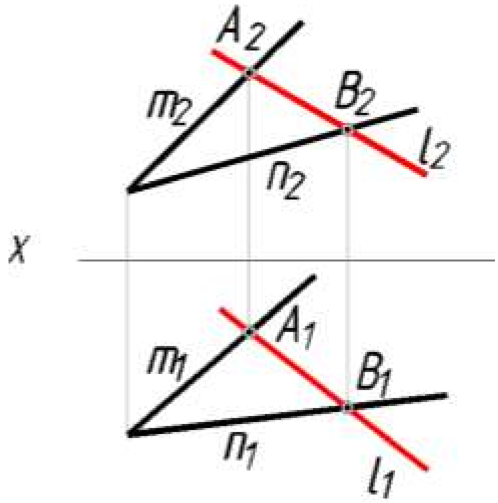
Плоскости уровня дважды проецирующие.

Позиционные задачи

С помощью позиционных задач определяются относительные положения в пространстве точек, прямых и плоскостей. К этим задачам относятся: задачи на взаимную принадлежность геометрических элементов и задачи на пересечение геометрических объектов.

3.4. Прямые линии и точки, расположенные в заданной плоскости

Прямая линия принадлежит плоскости, если проходит через две точки заданной плоскости. На рис.81 плоскость Γ задана двумя пересекающими прямыми ($m \cap n$). Прямая ℓ принадлежит плоскости $\Gamma(m \cap n)$, т.к. проходит через точки A и B плоскости. На рис.82 плоскость Ω задана отсеком плоскости (ABC). Прямая 1,2 принадлежит плоскости Ω, т.к. точка $1 \in AC$, точка $2 \in BC$.



$\ell \in A \in m \in \Gamma(m \cap n)$

$\ell \in B \in n \in \Gamma(m \cap n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell \in \Gamma(m \cap n)$

Рис.81

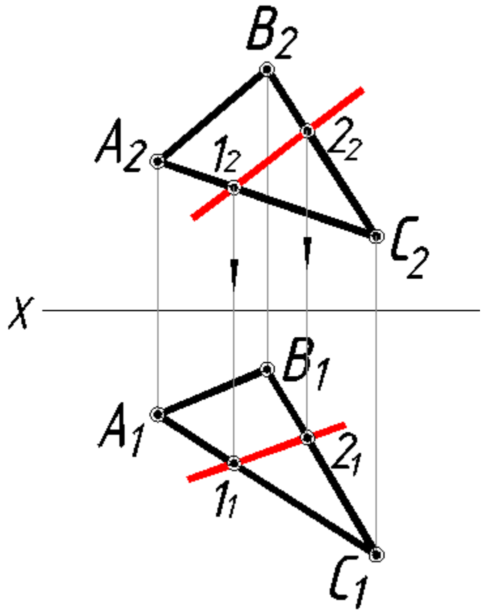


Рис.82

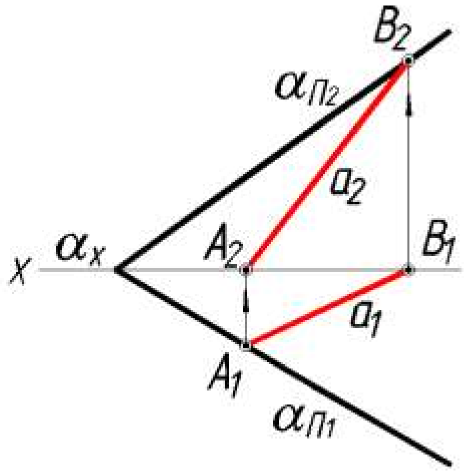


Рис.83

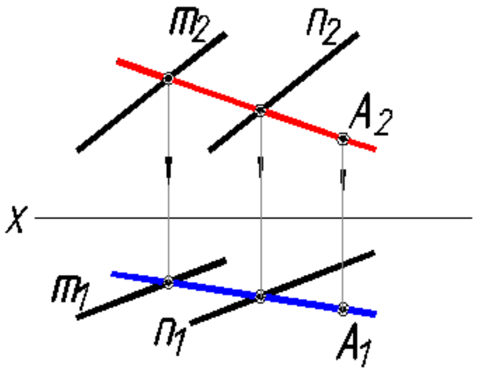
Плоскость α (рис.83) задана следами: горизонтальным $\alpha\Pi_1$ и фронтальным $\alpha\Pi_2$.

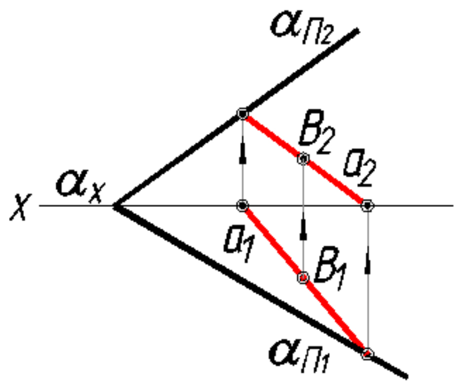
Прямая ***a*** **∈ α,** т.к. проходит через точки A и B плоскости **α.**

Точка A является горизонтальным следом прямой ***a*** и принадлежит горизонтальному следу плоскости α, точка B – фронтальный след прямой ***a***, принадлежит фронтальному следу плоскости α.

Прямая линия принадлежит плоскости, если можно выделить две точки прямой общие с заданной плоскостью.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит одной из прямых данной плоскости. Для того, чтобы построить в плоскости точку (рис.84) необходимо провести в плоскости прямую, принадлежащую плоскости, а затем задать на ней точку, которая принадлежит прямой и, следовательно, плоскости.





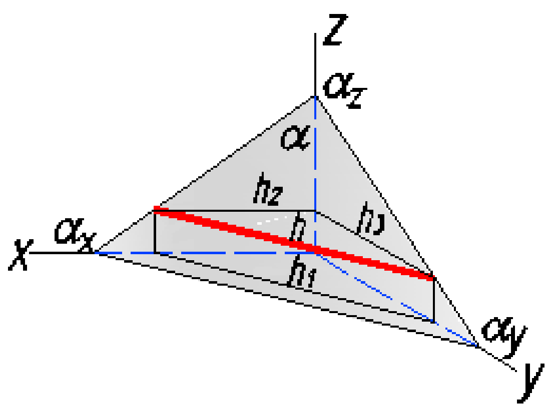
точка A $\in \alpha$ (m || n) B $\in \boldsymbol{a} \in \alpha \Rightarrow$ B $\in \alpha$

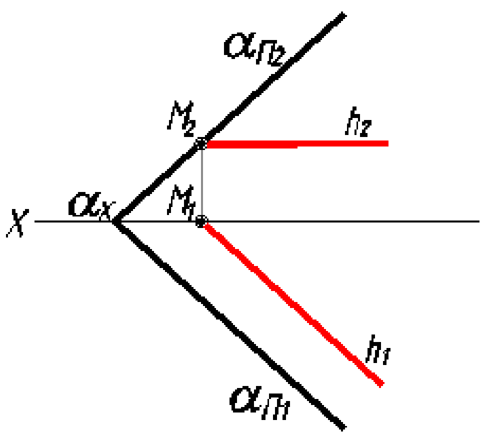
Рис.84

Главные линии плоскости

Среди множества прямых, которые могут быть проведены в плоскости, следует выделить главные линии плоскости или еще их называют линии особого положения в плоскости. К главным линиям плоскости относятся: горизонтали, фронтали, профильные прямые, а также линии наибольшего наклона.

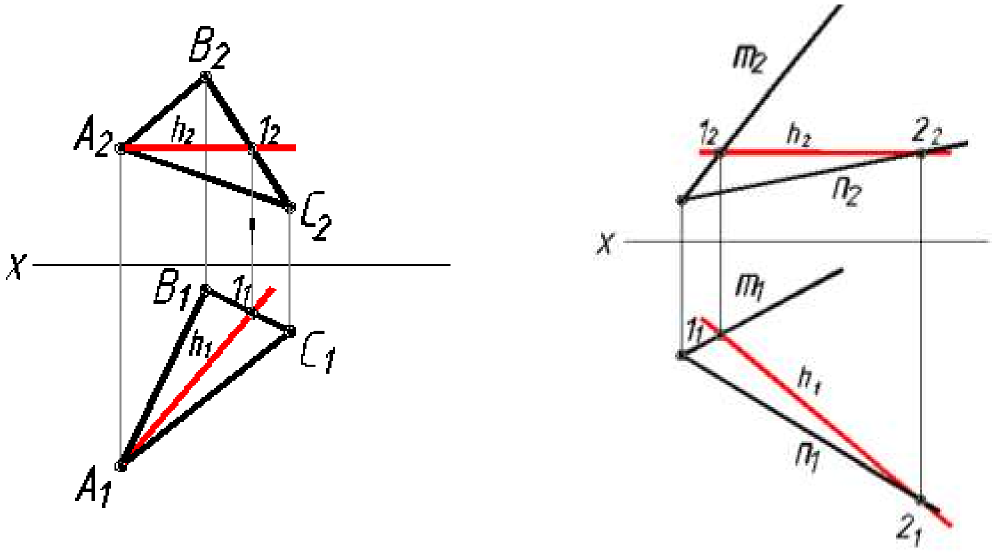
Горизонталь плоскости (h) – прямая линия, параллельная горизонтальной плоскости проекций $П_1$ и принадлежащая данной плоскости **α** (рис.85, 86). Построение горизонтали практически всегда начинают с фронтальной ее проекции, т.к. она расположена горизонтально, т.е. параллельно оси ох.





h $\in \alpha$; h || $П_1$; h_1 || $\alpha П_1$; h_2 || ox

Рис.85



$h \in \alpha\,(ABC)$; $h \parallel \Pi_1$; $h_2 \parallel ox$ $h \in \alpha\,(m \cap n)$; $h \parallel \Pi_1$; $h_2 \parallel ox$

Рис.86

Фронталь плоскости (f) – прямая линия, принадлежащая данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис.87, 88). Горизонтальная проекция фронтали горизонтальна (параллельная оси ох и соответственно перпендикулярна линиям связи), поэтому построение фронтали начинают с ее горизонтальной проекции.

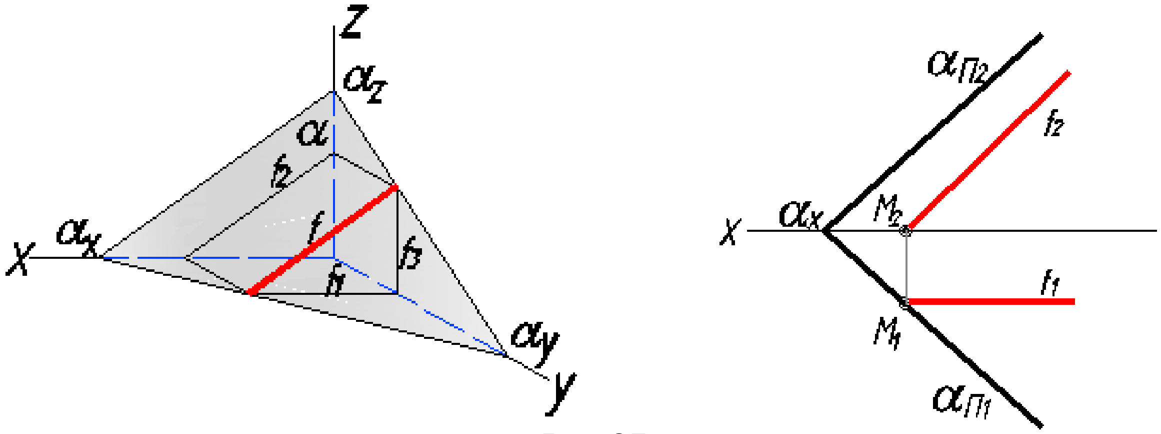
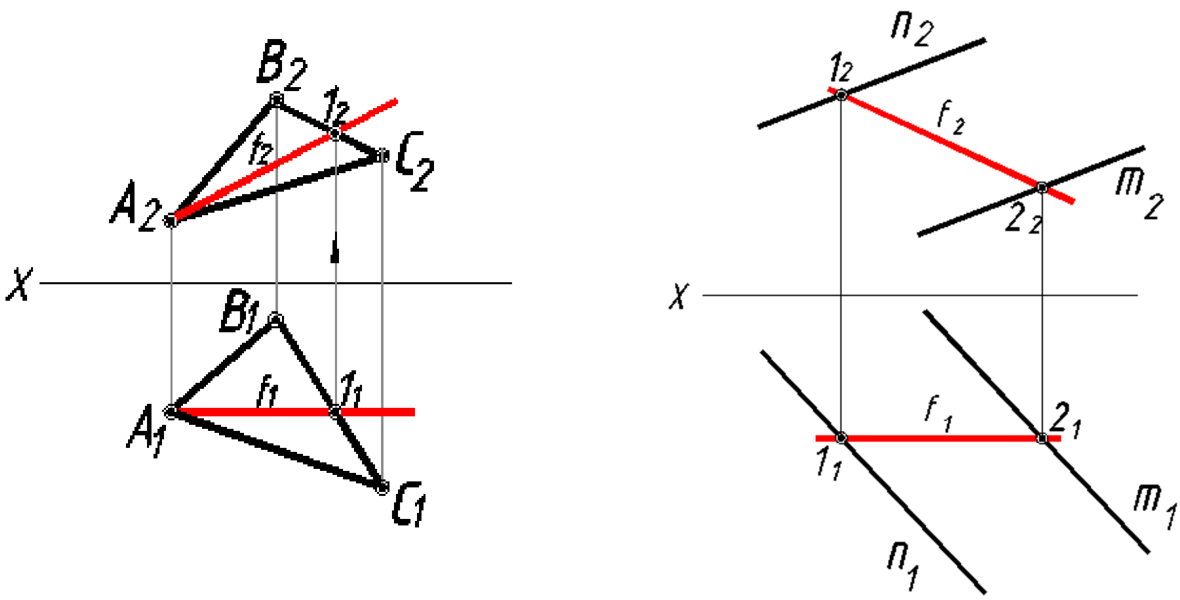


Рис.87

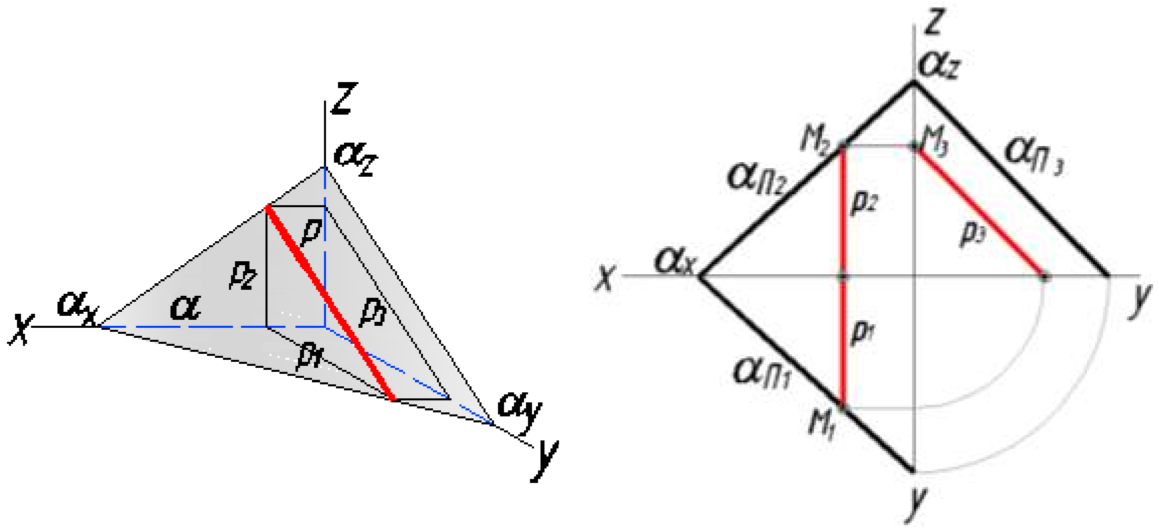
$f \in \alpha$; $f \parallel \Pi_2$; $f_2 \parallel \alpha\Pi_2$; $f_1 \parallel ox$



$f \in \alpha\,(ABC)$; $f \parallel П_2$; $f_1 \parallel ox$ $\qquad$ $f \in \alpha\,(m \parallel n)$; $f \parallel П_2$; $f_1 \parallel ox$

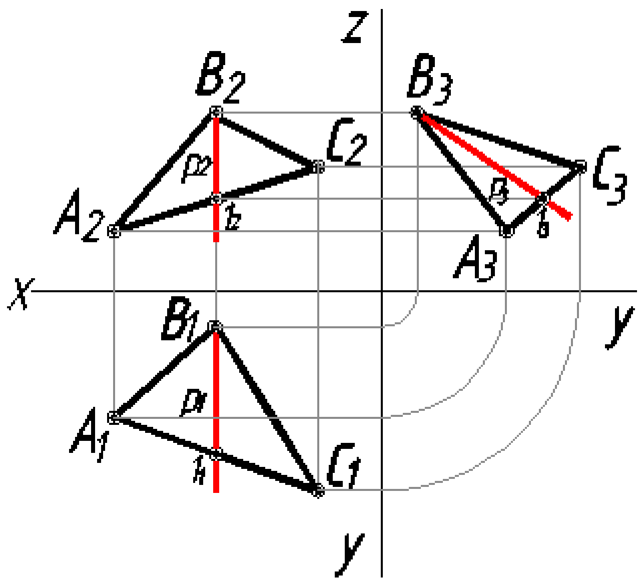
Рис.88

Профильная прямая плоскости (p) - прямая линия, принадлежащая данной плоскости и параллельная профильной плоскости проекций $П_3$ (рис.89, 90). Горизонтальная и фронтальная проекции профильной прямой всегда расположены вертикально, совпадают с линиями связи, перпендикулярно оси ox.



$p \in \alpha$; $p \parallel П_3$; $p_3 \parallel \alpha П_3$; $p_1 \parallel oy$; $p_2 \parallel oz$

Рис.89



$p \in \alpha\,(ABC)$; $p \parallel \Pi_3$

$p_1 \parallel oy$; $p_2 \parallel oz$;

p_1 , $p_2 \perp ox$

Рис.90

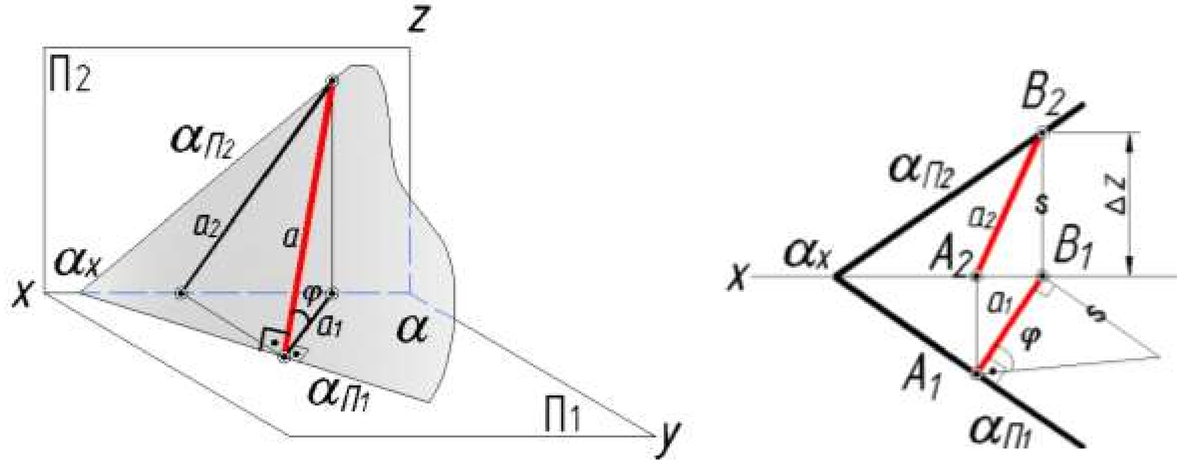
Следует заметить, что следы плоскости, также относятся к главным линиям плоскости, т.к. горизонтальный след плоскости – это горизонталь нулевого уровня плоскости, фронтальный след – фронталь нулевого уровня, профильный след – профильная прямая нулевого уровня данной плоскости.

Линии наклона – прямые, принадлежащие данной плоскости и перпендикулярны горизонталям, или фронталям, или профильным прямым плоскости и определяют угол наклона плоскости к соответствующей основной плоскости проекций. Линию наклона к горизонтальной плоскости проекций еще называют **линией наибольшего ската**.

На любой плоскости можно провести бесчисленное множество главных линий. Все линии шести направлений образуют плоские пучки параллельных прямых, т.е. все горизонтали плоскости параллельны между собой, все фронтали плоскости также параллельны друг другу и т.д.

3.6. Определение угла наклона плоскости общего положения к плоскости проекций

И так было сказано, что линии наклона служат для определения угла наклона плоскости к соответствующей основной плоскости проекций. Рассмотрим пример определения угла наклона заданной плоскости к горизонтальной плоскости проекций (рис.91). Угол наклона φ заданной плоскости α к плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ определяется двугранным углом, который измеряется линейным углом, образованным двумя принадлежащими этим плоскостям перпендикулярами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a_1}$, проведенными к линии пресечения $\boldsymbol{\alpha}\Pi_1$ в соответствии с теоремой о трех перпендикулярах (рис.91а).



а)

б)

Линия наибольшего наклона $\boldsymbol{a} \in \alpha$; $\boldsymbol{a} \perp \alpha\Pi_1$;
горизонтальная проекция линии наибольшего наклона $\boldsymbol{a_1} \perp \alpha\Pi_1$;
$\boldsymbol{\alpha}\Pi_1$ – горизонтальный след плоскости $\boldsymbol{\alpha}$;
φ - угол наклона плоскости **α** к горизонтальной плоскости проекций.

Рис.91

Для того, чтобы определить угол наклона заданной плоскости к горизонтальной плоскости проекций на чертеже Монжа, необходимо методом прямоугольного треугольника определить угол между линией наклона (линией наибольшего ската) и горизонтальной плоскостью проекций (рис.91 б). Т.к. горизонтальный след – есть горизонталь нулевого уровня, то, следовательно, линия наибольшего ската перпендикулярна любой горизонтали заданной плоскости.

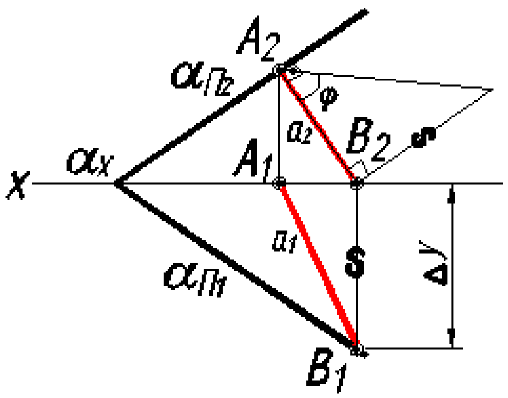


Рис.92

Подобные рассуждения проводятся при определении угла наклона заданной плоскости к фронтальной и профильной плоскостям проекций. При этом линия наклона к фронтальной плоскости проекций Π_2 перпендикулярна фронтальному следу (рис.92) или любой фронтали заданной плоскости. Линия наклона к профильной плоскости проекций Π_3 перпендикулярна профильному следу или профильной прямой плоскости.

Ниже на рисунках приведены примеры определения углов наклона отсека плоскости АВС к горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис.93а) и к фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис.93б).

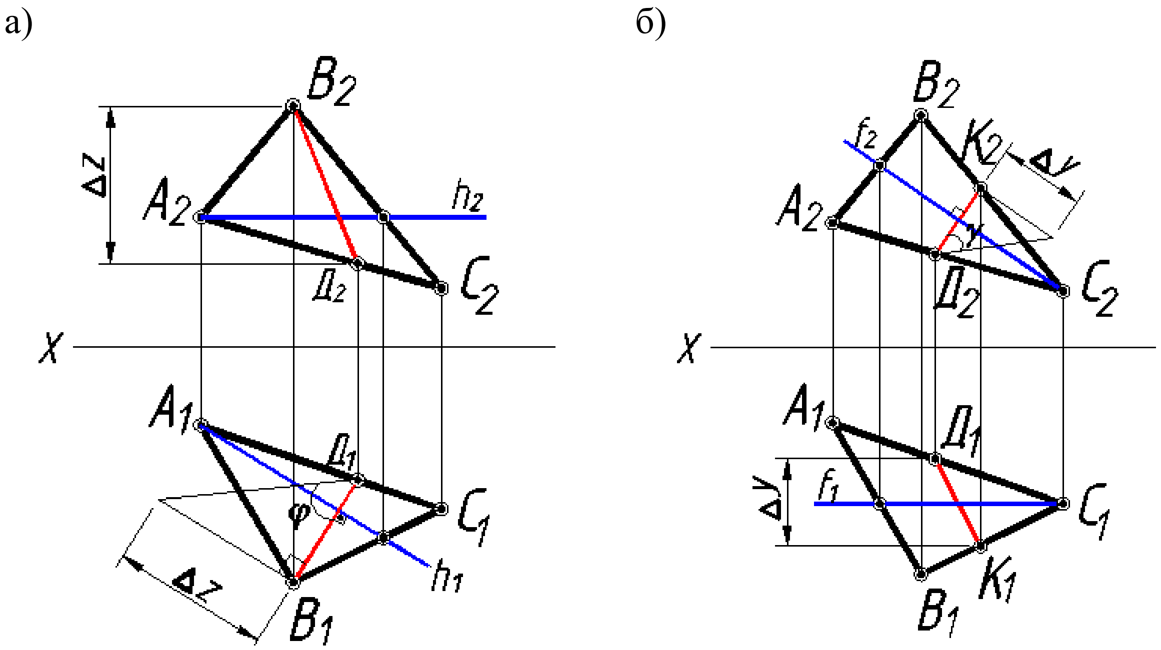


Рис.93

3.7. Взаимное расположение прямой линии и плоскости

Возможны следующие три случая относительного расположения прямой линии и плоскости:

– прямая линия принадлежит плоскости;
– прямая линия параллельна плоскости;
– прямая линия пересекает плоскость.

Прямая линия принадлежит плоскости, если проходит через две точки этой плоскости (см. рис.81-83).

Прямая линия параллельна плоскости, если она параллельная любой прямой этой плоскости (рис.94).

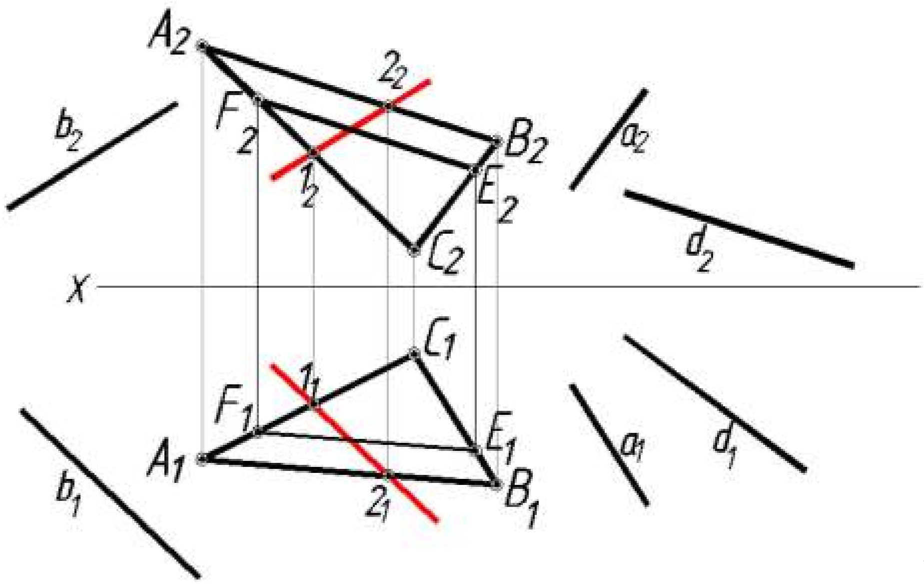


Рис.94

$\boldsymbol{a_1} \parallel B_1C_1$; $\boldsymbol{a_2} \parallel B_2C_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a} \parallel BC\ (BC \in ABC) \;\Rightarrow \boldsymbol{a} \parallel ABC$;
$b_1 \parallel 1_12_1$; $b_2 \parallel 1_22_2 \;\Rightarrow\; b \parallel 1{,}2\ (1{,}2 \in ABC) \;\Rightarrow b \parallel ABC$;
$d_2 \parallel E_2F_2$; $d_1 \nparallel E_1F_1 \;\Rightarrow\; d \nparallel EF\ (EF \in ABC) \;\Rightarrow d \nparallel ABC$

В данном примере ***a*** и ***b*** принадлежат плоскости ABC, а прямая ***d*** не принадлежит плоскости ABC.

3.8. Определение точки пересечения прямой линии с плоскостью

Чтобы построить точку пересечения прямой линии с плоскостью общего положения, нужно заключить прямую во вспомогательную проецирующую плоскость, определить линию пересечения плоскостей заданной и вспомогательной, а затем отметить точку, в которой заданная прямая пересекается с построенной. Это и будет искомая точка пересечения прямой с плоскостью.

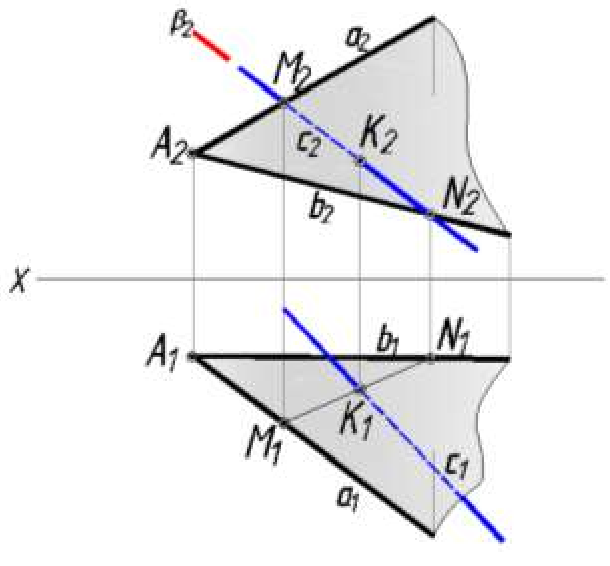


Рис. 95

Плоскость **α** (*a* ∩ *b*) – общего положения задана двумя пересекающими прямыми;
c – прямая линия общего положения
Вспомогательная плоскость β, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, проведена через заданную прямую *c*.

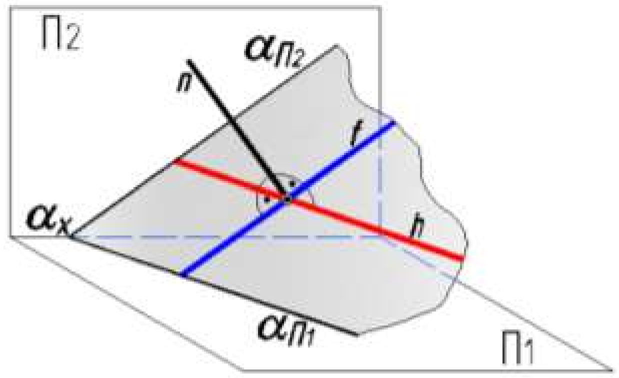
$$\beta \perp \Pi_2; \qquad c \in \beta$$

Плоскость **α** пересекается со вспомогательной плоскостью β по прямой MN, которая в свою очередь пересекается с прямой *c* в точке K.

$$\beta \cap \boldsymbol{\alpha} = MN; \quad MN \cap c = K$$
$$c \cap \boldsymbol{\alpha} = K$$

3.9. Прямая линия, перпендикулярная плоскости

Прямая линия перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.



$f \parallel \Pi_2$

$h \parallel \Pi_1$

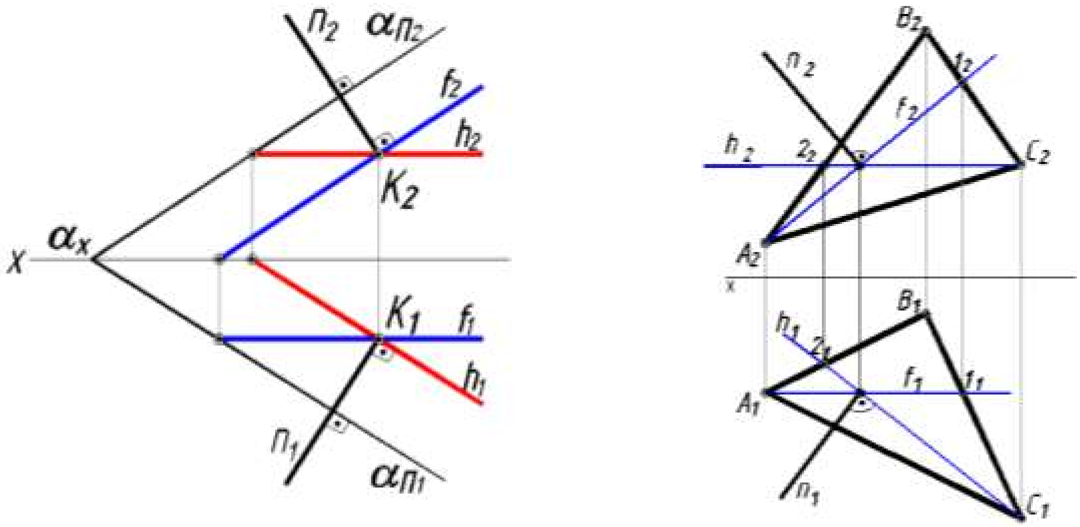
$(f \cap h) \in \alpha \Rightarrow$

$n \perp f$

$n \perp h$

$n \perp \alpha(f \cap h)$

Рис.96



$$n_1 \perp h_1 \, ; \, n_2 \perp f_2 \;\Rightarrow\; n \perp (f \cap h) \;\Rightarrow\; n \perp \alpha$$

Рис. 97

Прежде всего, нужно вспомнить, что прямой угол проецируется на плоскость проекций без искажения, если одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей. Поэтому фронтальную проекцию прямой, перпендикулярной плоскости, проводят перпендикулярно фронтальной проекции фронтали, а горизонтальную проекцию – перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали. И в этом случае прямая n, будет перпендикулярна одновременно и горизонтали, и фронтали плоскости, а, следовательно, и всей плоскости α (рис.96, 97).

Так как все фронтали плоскости параллельны и все горизонтали параллельны друг другу, то определять точку пересечения их не обязательно, достаточно знать направление этих линий (рис.98 и 99).

Горизонтальный след плоскости является горизонталью нулевого уровня, фронтальный след плоскости – фронталь нулевого уровня. Отсюда следует, что горизонтальная проекция прямой n перпендикулярна горизонтальному следу, а фронтальная проекция перпендикулярна фронтальному следу.

а) б)

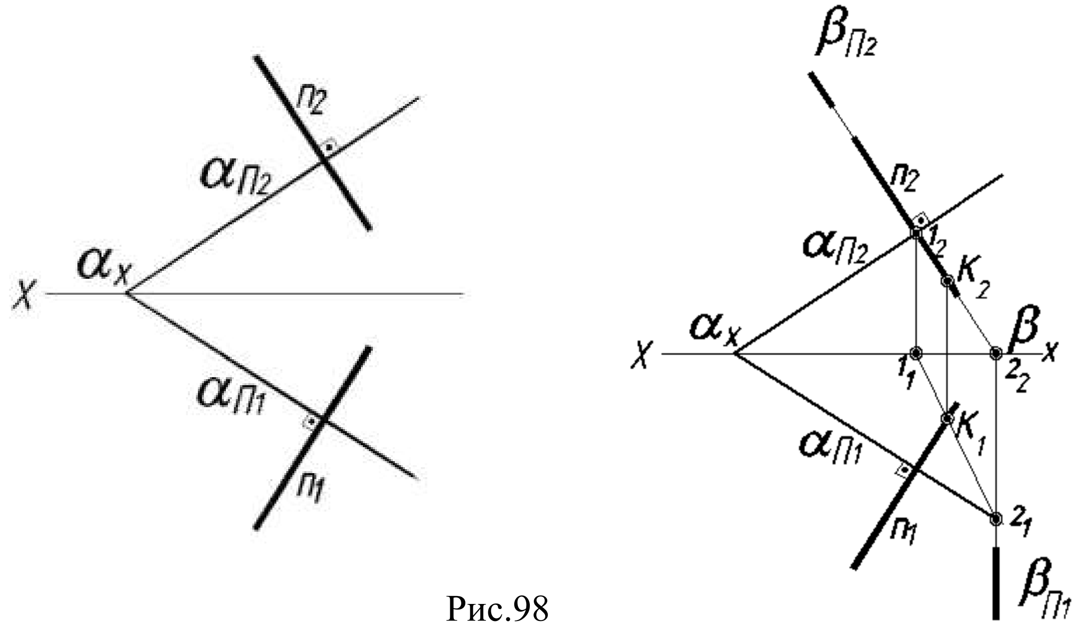


Рис.98

На рис.98(б) показано решение задачи на определение точки пересечения прямой n с плоскостью α.

На рис. 99 дан пример решения задачи на построение перпендикуляра из точки D к заданной плоскости АВС. Таким образом, можно определить расстояние от точки до плоскости.

Из точки D восстанавливается перпендикуляр к горизонтали и фронтали плоскости АВС.

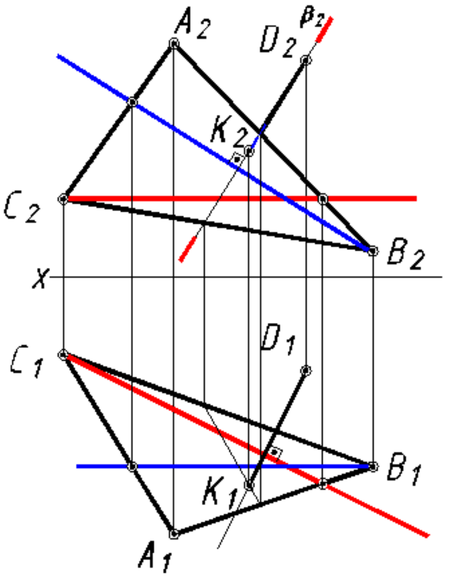
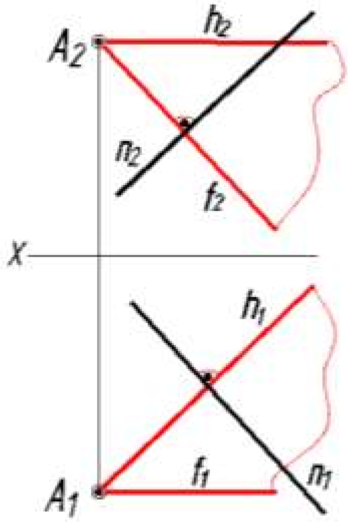


Рис.99

Для того, чтобы определить точку пересечения прямой линии с плоскостью, этот перпендикуляр заключается во вспомогательную проецирующую плоскость (в данном примере вспомогательная плоскость перпендикулярна фронтальной плоскости проекций). Определяется линия пересечения вспомогательной плоскости с заданной и отмечается точка пересечения построенной линии с перпендикуляром. Точка К является точкой пересечения перпендикуляра с плоскостью АВС.

Часто приходится решать обратную задачу, строить плоскость, перпендикулярную заданной прямой.

На рис.100 задана прямая n общего положения. Через точку А требуется построить плоскость, перпендикулярную прямой n.



В этом случае нужно воспользоваться главными линиями (горизонталью и фронталью) плоскости, поскольку известно их направление. Искомая плоскость задается двумя пересекающими прямыми α (f ∩ h).

$$h_1 \perp n_1;\ f_2 \perp n_2 \ \Rightarrow\ (f \cap h) \perp n \ \Rightarrow \ \Rightarrow\ \alpha \perp n$$

Рис.100

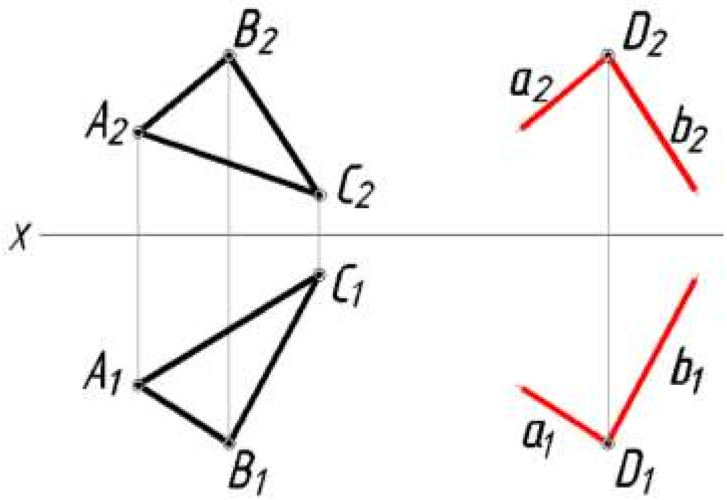
3.10. Взаимное расположение двух плоскостей

Из аналитической геометрии известно, что две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельными, в частном случае совпадая друг с другом, либо пересекающимися. Частным случаем пересекающихся плоскостей являются взаимно перпендикулярные плоскости.

Параллельные плоскости

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис.101).

Если параллельные плоскости задаются на эпюре следами, то одноименные следы этих плоскостей параллельны (рис. 102).



$\boldsymbol{a}_1 \parallel A_1B_1$

$\Rightarrow \boldsymbol{a} \parallel AB$

$\boldsymbol{a}_2 \parallel A_2B_2$

$b_1 \parallel B_1C_1$

$\Rightarrow b \parallel BC$

$b_2 \parallel B_2C_2$

$\Sigma(ABC) \parallel \beta(\boldsymbol{a} \cap b)$

Рис.101

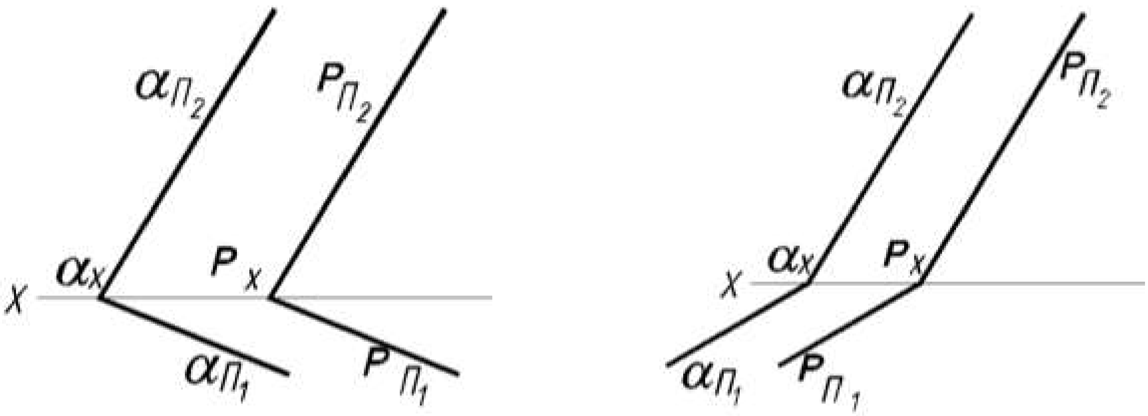


Рис.102

3.11. Пересекающиеся плоскости

Две плоскости пересекаются по прямой линии, для построения которой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям, либо одну точку и направление линии пересечения.

Прямая линия пересекается с плоскостью в точке. Рассмотрим случай, когда прямая линия общего положения ***a*** пересекается с проецирующей плоскостью α (рис.103).

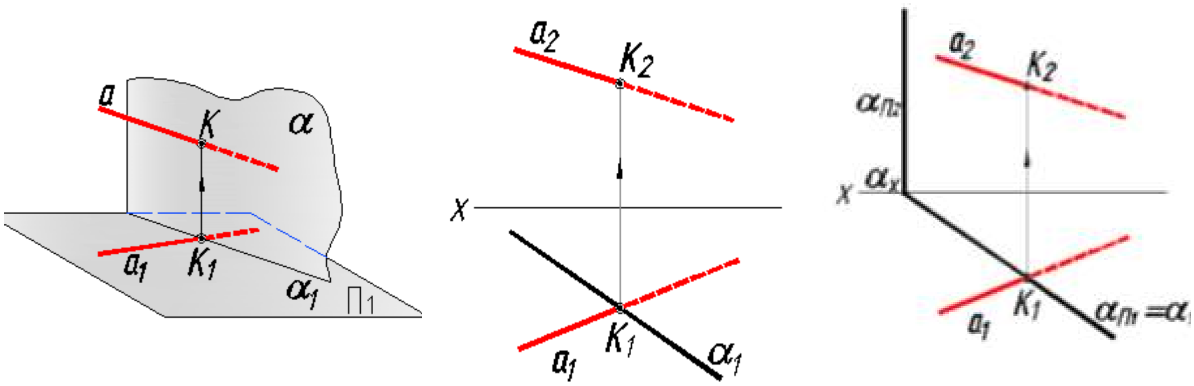


Рис.103

$\boldsymbol{a} \cap \alpha = K \quad \Rightarrow \quad K \in \boldsymbol{a}$ $(K_1 \in \boldsymbol{a_1}$; $K_2 \in \boldsymbol{a_2})$; $\quad K \in \alpha$ $(K_1 \in \alpha_1)$

Используя вышеизложенный пример, решается задача по построению линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проецирующая (рис.104).

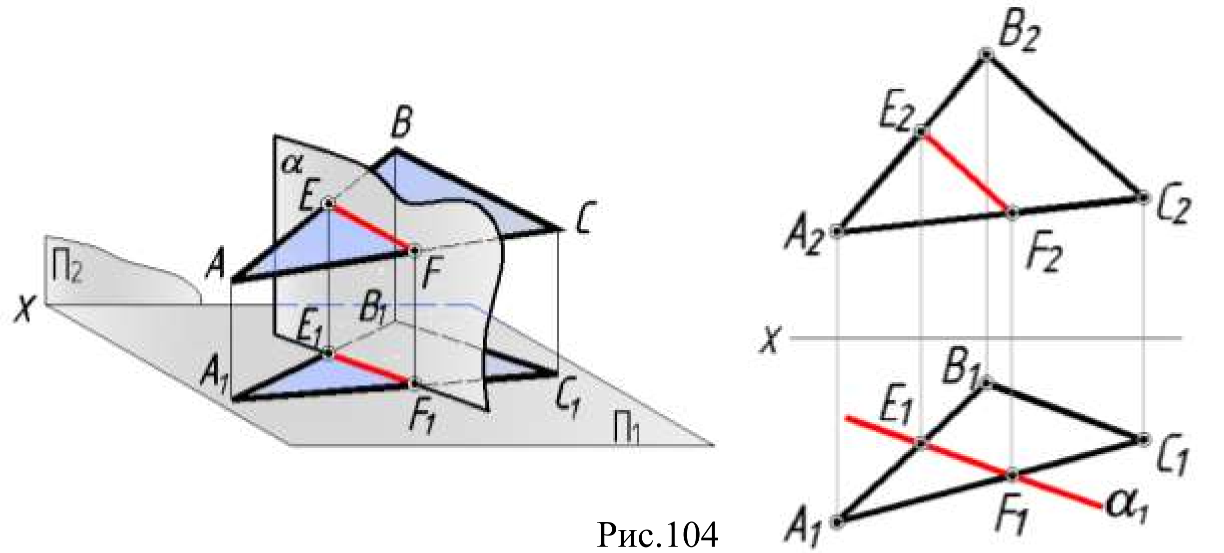
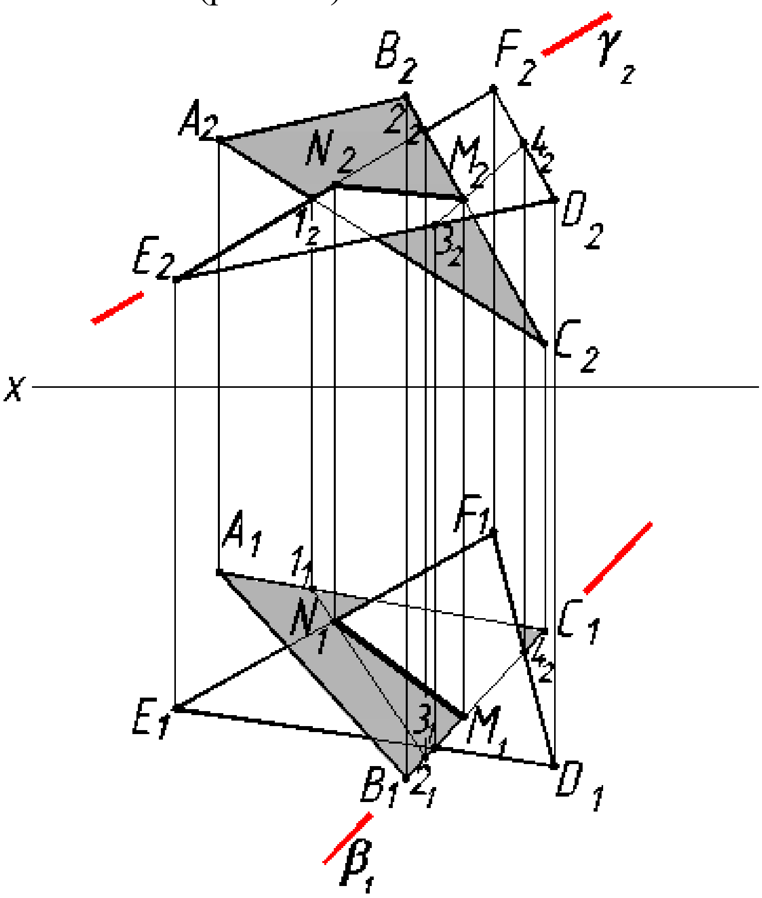


Рис.104

Плоскость ABC – общего положения, плоскость α - горизонтально-проецирующая ($\alpha \perp \Pi_1$). $E = AB \cap \alpha$; $F = AC \cap \alpha$ $\Rightarrow$ $EF = \alpha \cap ABC$

И, наконец, рассмотрим общий случай пересечения, когда обе плоскости – общего положения.

Чтобы построить линию пересечения двух плоскостей общего положения, нужно рассечь их двумя проецирующими плоскостями, определить линии пересечения вспомогательных плоскостей и заданных, и отметив общие для этих линий точки, соединить их прямой линией (рис.105).



$EF \in \gamma$ ($\gamma \perp \Pi_2$)
$\gamma \cap ABC = 1,2$
$1,2 \cap EF = N$
$N \in 1,2 \in ABC$
$N \in EF \in EDF$

$BC \in \beta$ ($\beta \perp \Pi_1$)
$\beta \cap EDF = 3,4$
$3,4 \cap BC = M$
$M \in 3,4 \in EDF$
$M \in BC \in ABC$

$MN = ABC \cap EDF$

Рис.105

При построении линии пересечения двух плоскостей общего положения в качестве посредников можно использовать плоскости уровня (рис.106). При этом вспомогательная плоскость будет пересекаться с заданной плоскостью общего положения по ее главной линии: горизонтали (если вспомогательная плоскость горизонтальная) или фронтали (если вспомогательная плоскость фронтальная).

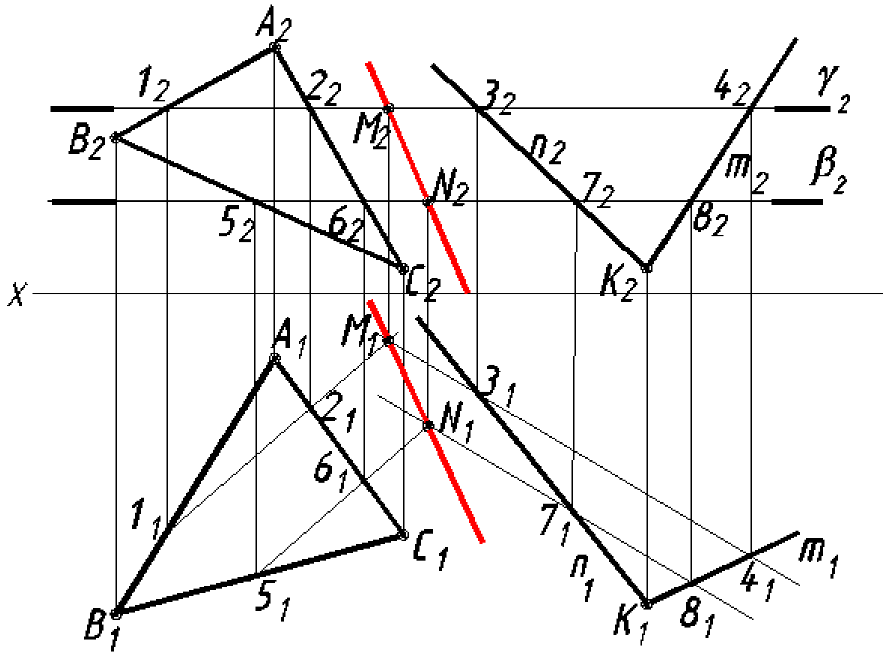


Рис.106

1). Вспомогательная плоскость γ ($\gamma \parallel \Pi_1$)

$\gamma \cap ABC = 1,2$; $\gamma \cap (m \cap n) = 3,4$

1,2 – горизонталь плоскости ABC; 3,4 – горизонталь плоскости $(m \cap n)$

$1,2 \cap 3,4 = M$

$M \in 1,2 \in ABC$; $M \in 3,4 \in (m \cap n)$

2).Вспомогательная плоскость β ($\beta \parallel \Pi_1$)

$\beta \cap ABC = 5,6$; $\beta \cap (m \cap n) = 7,8$

$5,6 \cap 7,8 = N$

$N \in 5,6 \in ABC$; $N \in 7,8 \in (m \cap n)$

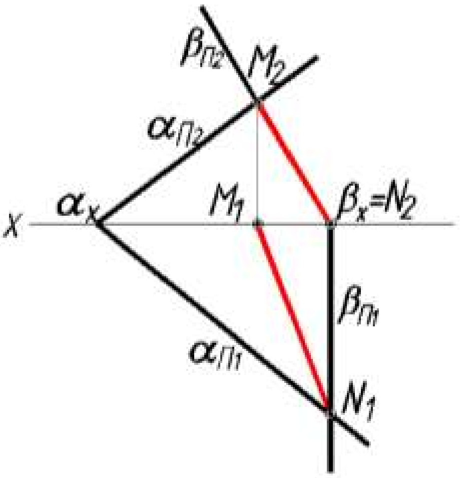
$MN = ABC \cap (m \cap n)$

Линия пересечения двух плоскостей, заданных следами, проходит через точки пересечения следов M и N (рис.107). Соединяя одноименные проекции этих точек прямой линией, получим проекции линии пересечения плоскостей. Необходимо отметить, что в данной задаче роль вспомогательных секущих плоскостей выполняют плоскости проекций Π_1 и Π_2.

Если одна из пересекающихся плоскостей проецирующая, то одна из проекций линии пересечения совпадает со следом этой плоскости и с ее проекцией, которая является прямой (рис.107а).

Если точки пересечения одноименных следов находятся вне поля чертежа, то для определения линии пересечения плоскостей следует использовать вспомогательные плоскости уровня – горизонтальные или фронтальные (рис.108).

а)



α - плоскость общего положения

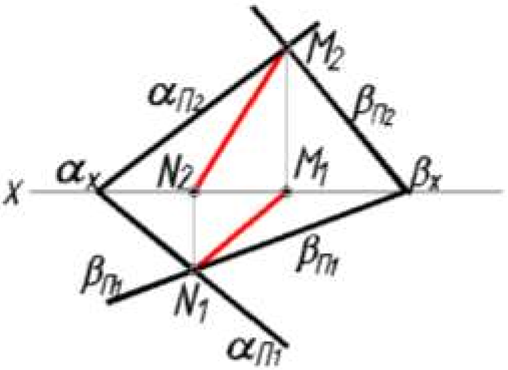
$\beta \perp \Pi_2$ – фронтально-проецирующая плоскость

$N = \alpha\Pi_1 \cap \beta\Pi_1$

$M = \alpha\Pi_2 \cap \beta\Pi_2$

$MN = \alpha \cap \beta$

б)



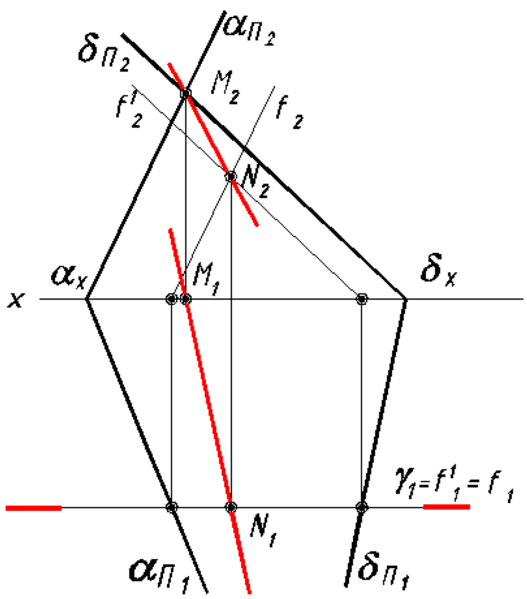
α и β - плоскости общего положения

$N = \alpha\Pi_1 \cap \beta\Pi_1$

$M = \alpha\Pi_2 \cap \beta\Pi_2$

$MN = \alpha \cap \beta$

Рис.107



α и δ - плоскости общего положения;

$M = \alpha\Pi_2 \cap \delta\Pi_2$;

Вспомогательная плоскость

γ ($\gamma \parallel \Pi_2$) – фронтальная плоскость

$\gamma \cap \alpha = f$; $\gamma \cap \delta = f^1$;

f – фронталь плоскости α ;

f^1 –фронталь плоскости δ ;

$f \cap f^1 = N$;

$MN = \alpha \cap \delta$

Рис.108

3.12. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

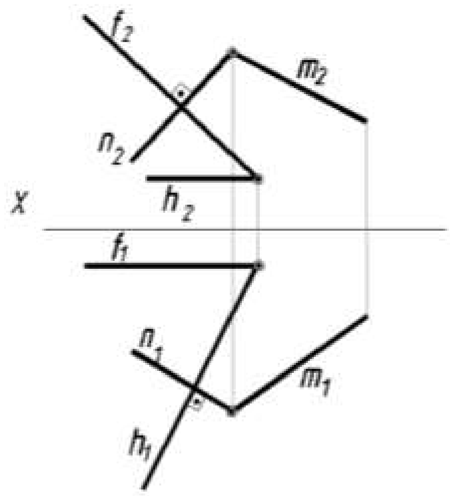


Рис. 109

На рис. 109 прямая линия n перпендикулярна плоскости, заданной двумя пересекающими прямыми (f ∩ h), отсюда следует, что плоскость, заданная двумя пересекающими прямыми (n ∩ m), перпендикулярна плоскости (f ∩ h).

$$n_1 \perp h_1 \,;\, n_2 \perp f_2 \;\Rightarrow\; n \perp (f \cap h) \;\Rightarrow$$

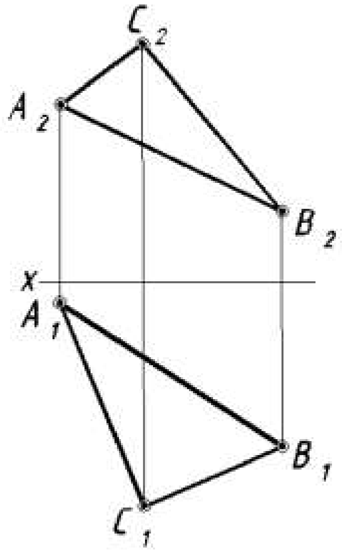
$$(n \cap m) \perp (f \cap h)$$

m – прямая общего положения

Вопросы для самопроверки

1. Перечислить возможные способы задания плоскости на чертеже.
2. Что называется следом плоскости? Как построить следы плоскости? Что такое точка схода?
3. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?
4. Какие плоскости называются плоскостями частного положения?
5. В каком случае точка принадлежит плоскости?
6. Назвать условие принадлежности прямой линии плоскости?
7. Какие линии плоскости называются главными (линиями особого положения)?
8. Как определить угол наклона плоскости к плоскости проекций?
9. Перечислить случаи взаимного положения двух плоскостей.
10. Перечислить случаи взаимного положения прямой линии и плоскости.
11. Как построить прямую линию, параллельную плоскости?
12. Как определяется точка пересечения прямой линии с плоскостью?
13. В каком случае прямая линия перпендикулярна плоскости?
14. Назовите условие параллельности двух плоскостей.
15. Как строится линия пересечения двух плоскостей? Как определить видимость пересекающихся плоскостей?
16. Как построить две взаимно перпендикулярные плоскости?

Задача 1. Указать, каким способом заданы плоскости на чертежах. Какое они занимают положение относительно плоскостей проекций? Построить следы этих плоскостей (рис.110 – 113).



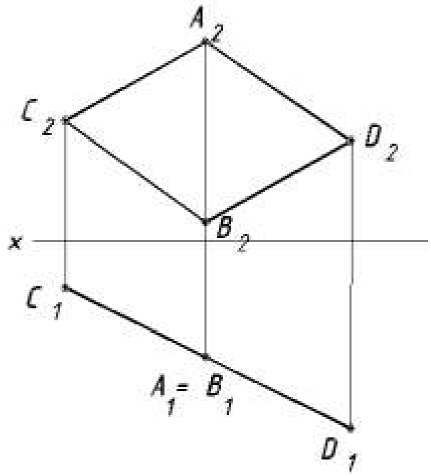
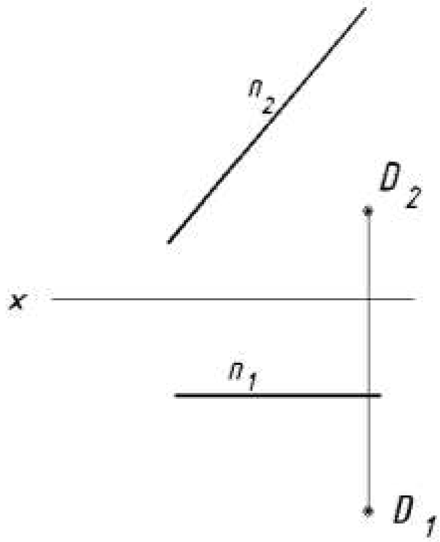


Рис.110



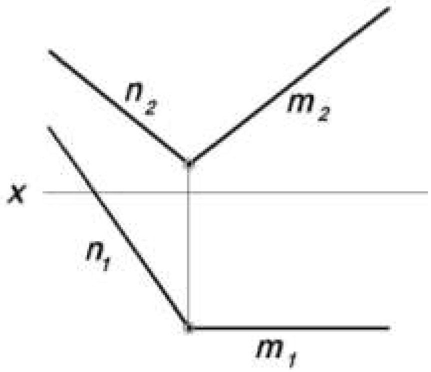
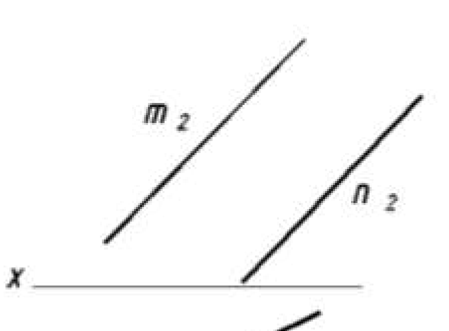


Рис.111



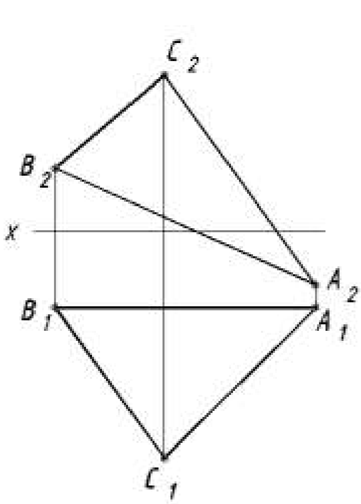


Рис.112

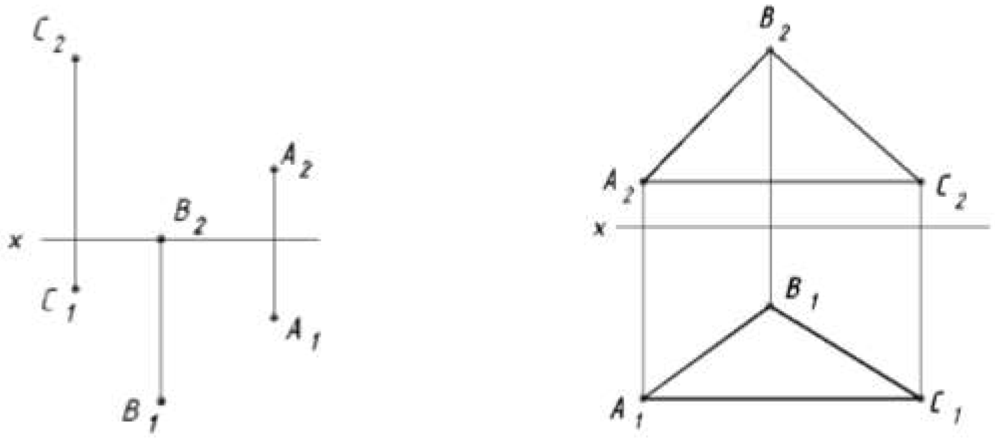


Рис.113

Задача 2. На рис. 110, 111 определить угол наклона заданной плоскости к горизонтальной плоскости проекций, на рис.112, 113 – к фронтальной плоскости проекций.

Задача 3. Построить недостающие проекции точек B и D, прямых линий d и k, принадлежащих заданным плоскостям (рис. 114 - 116).

Задача 4. На рис. 114 определить угол наклона заданных плоскостей к горизонтальной плоскости проекций, а на рис. 115 – к фронтальной плоскости проекций.

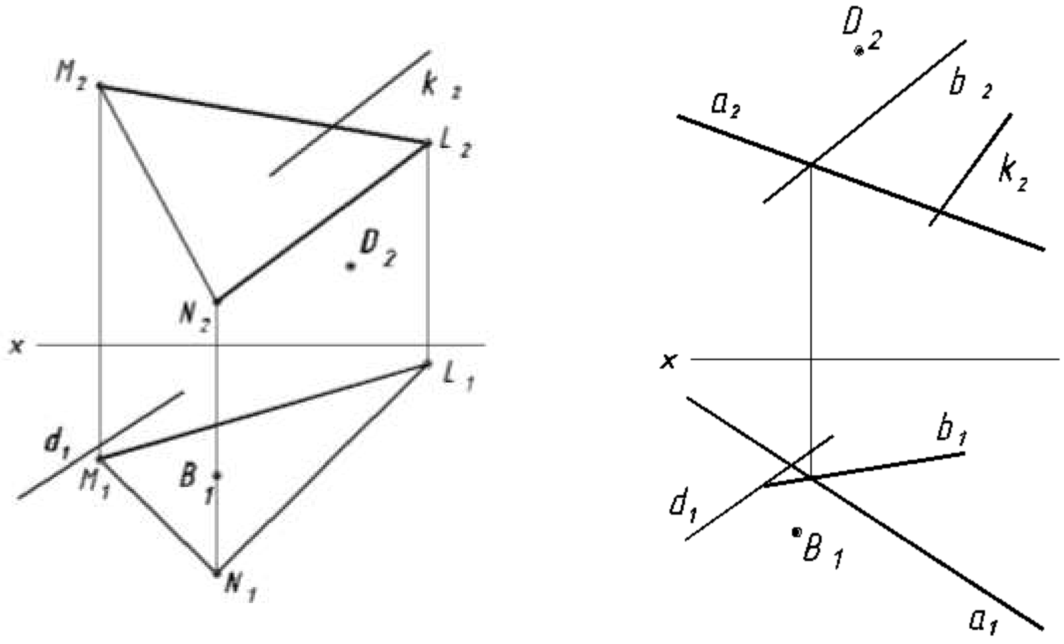
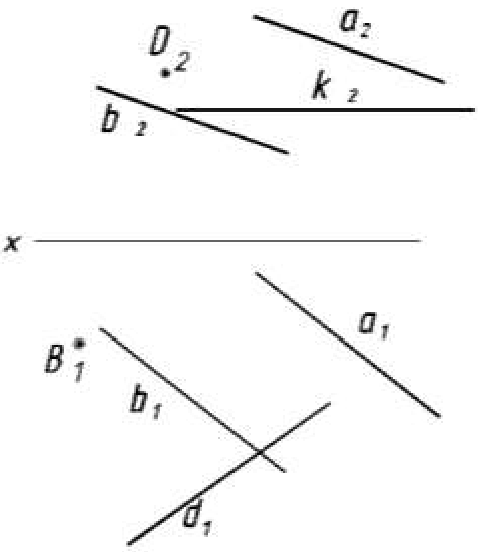


Рис.114



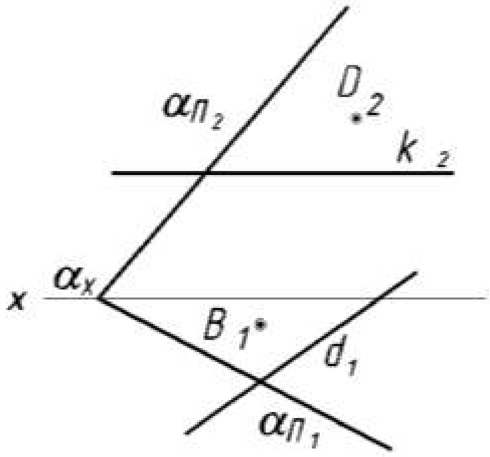
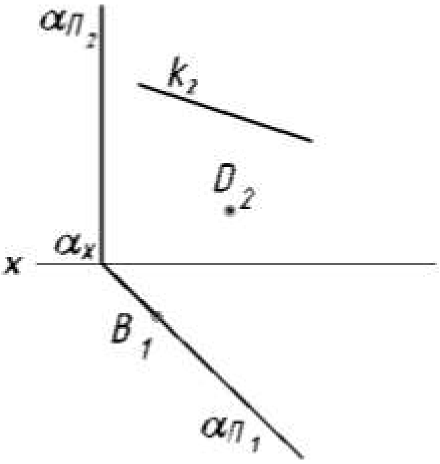


Рис.115



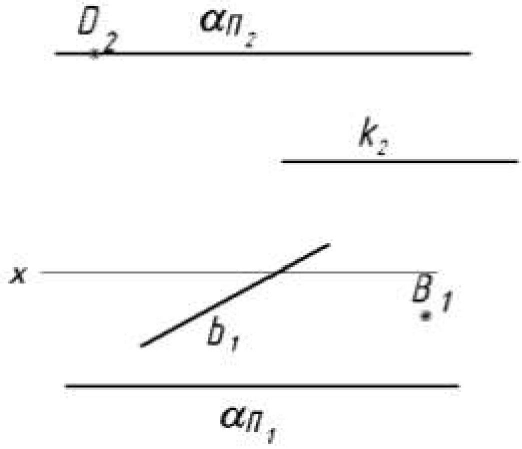


Рис. 116

Задача 5. Достроить горизонтальную проекцию плоского пятиугольника ABCDE (рис.117).

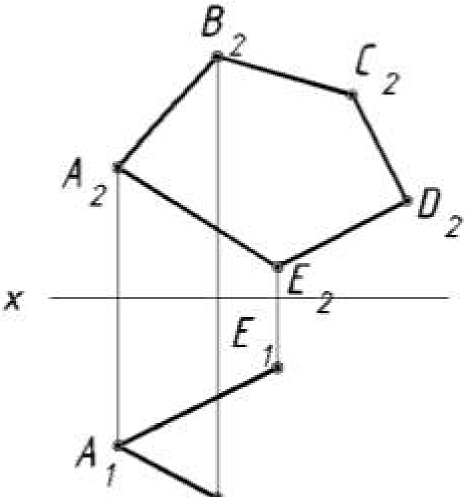


Рис.117

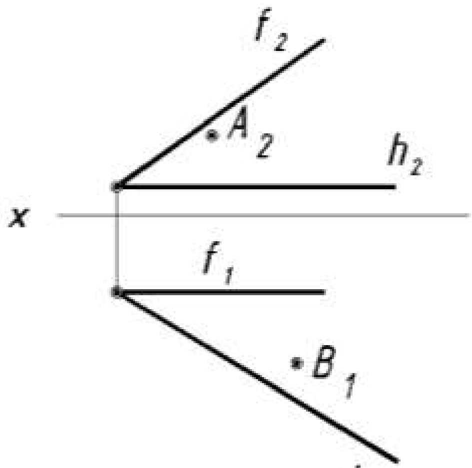


Рис.118

Задача 6. В плоскости Σ (h ∩ f) построить отрезок AB, заданный разноименными проекциями его концов (рис.118).

Задача 7. Через точку A провести плоскость, параллельную двум прямым линиям m и n (рис. 119).

Задача 8. Через точку M провести плоскость, параллельную плоскости Σ (рис. 120). В первом случае плоскость задана двумя пересекающими прямыми, во втором – двумя параллельными прямыми.

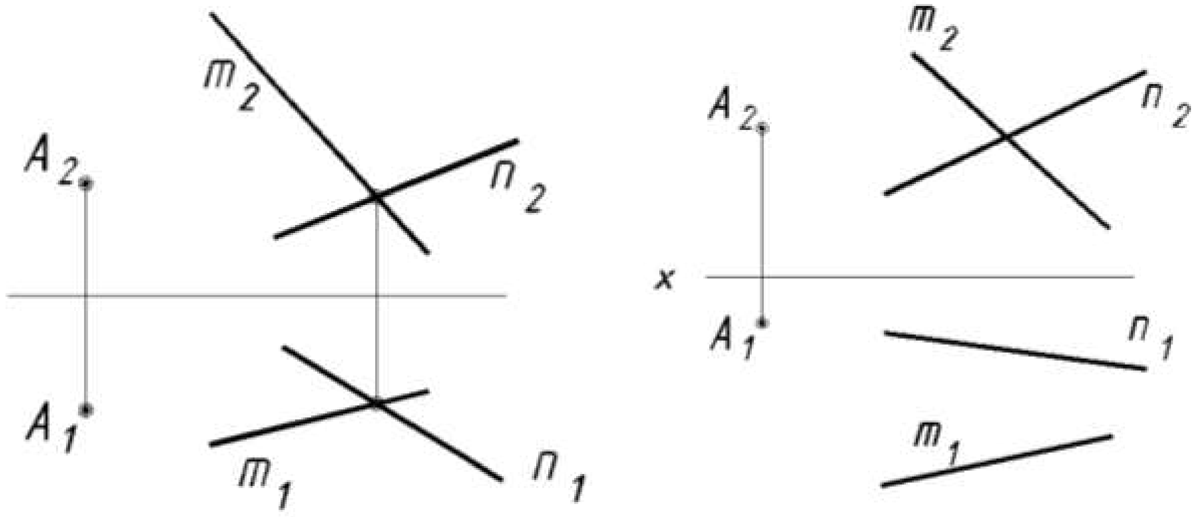


Рис.119

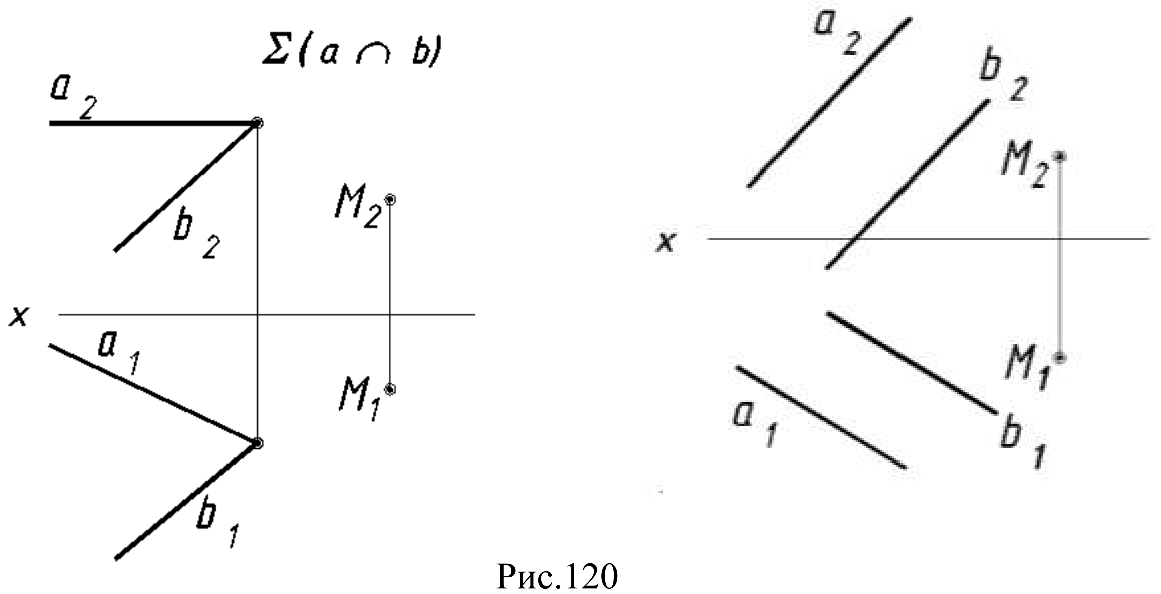


Рис.120

Задача 7. Построить линию пересечения двух плоскостей. Определить их видимость (рис. 121 – 125).

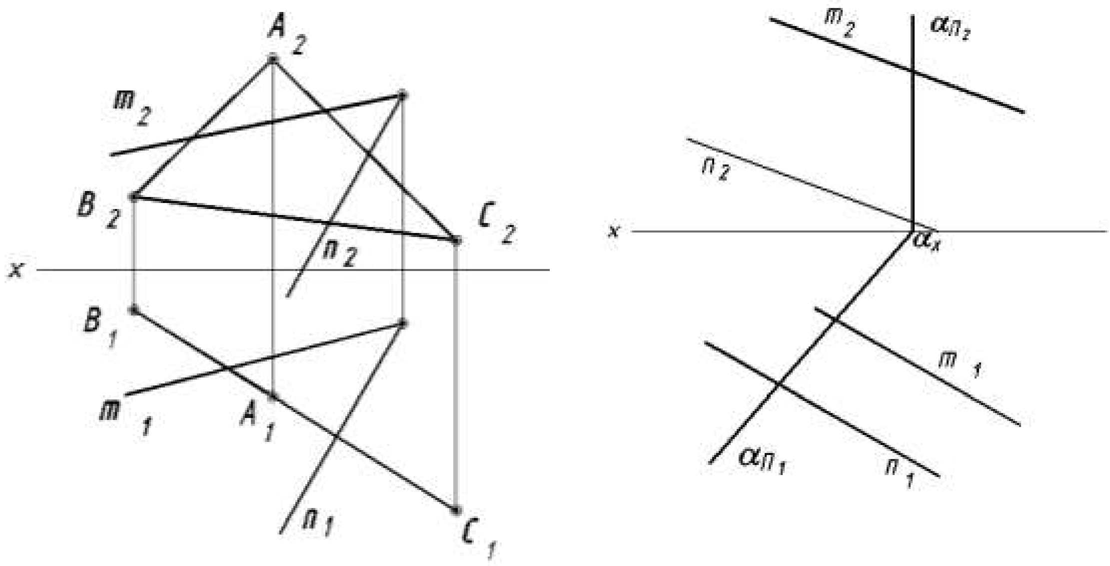


Рис.121

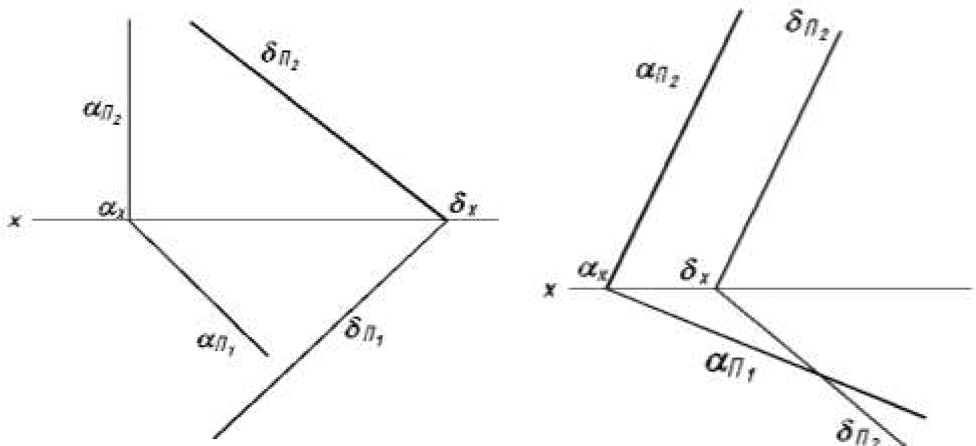


Рис.122

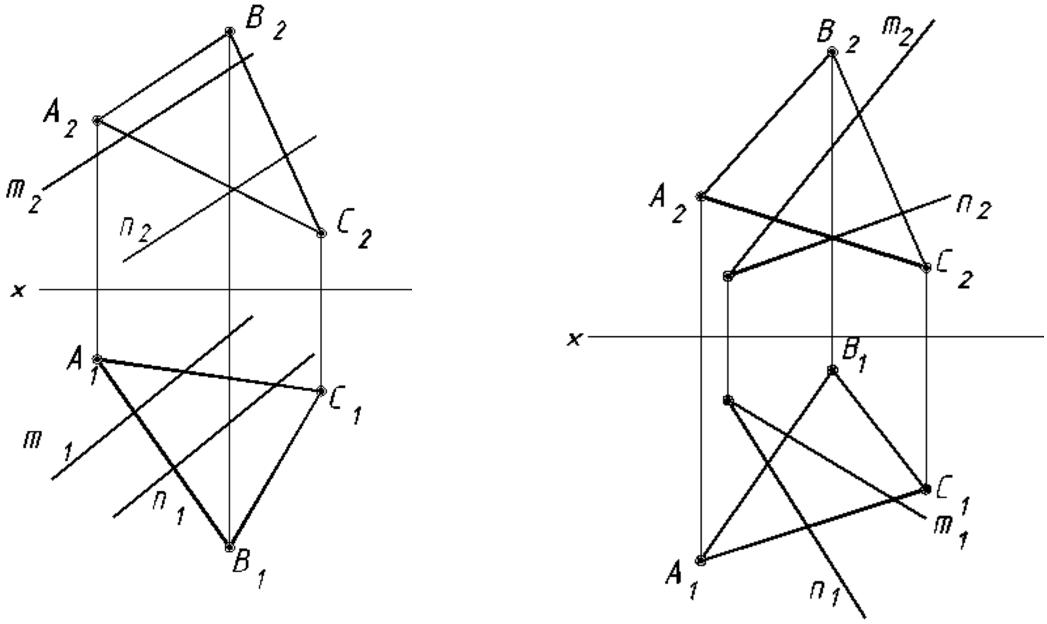


Рис. 123

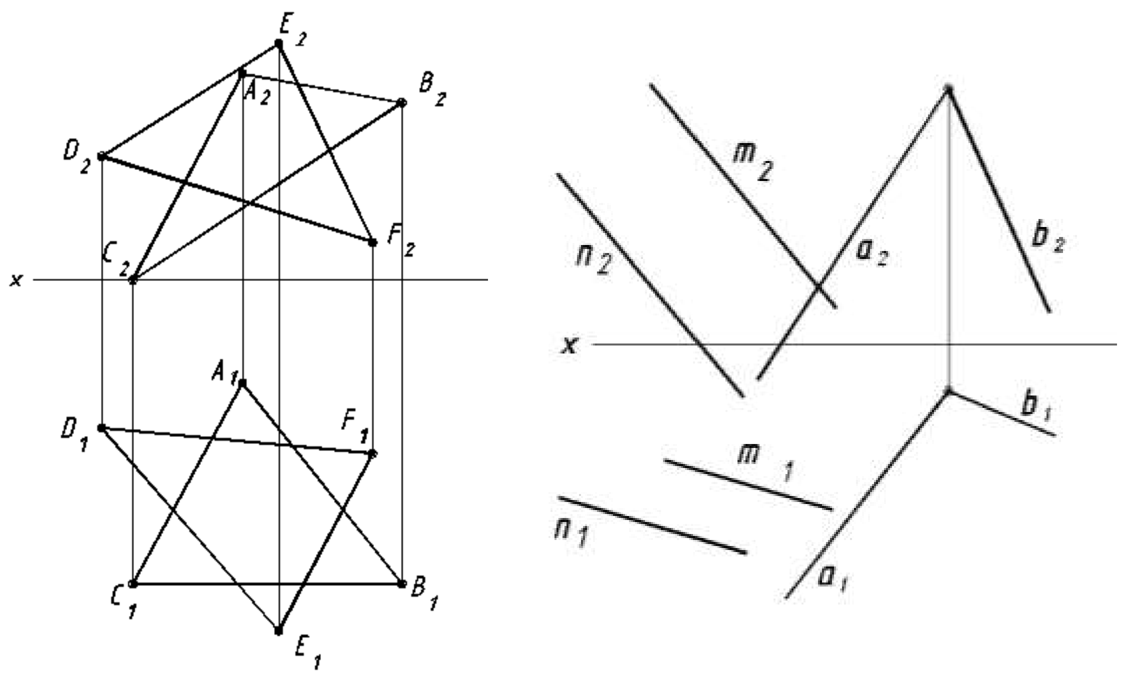


Рис.124

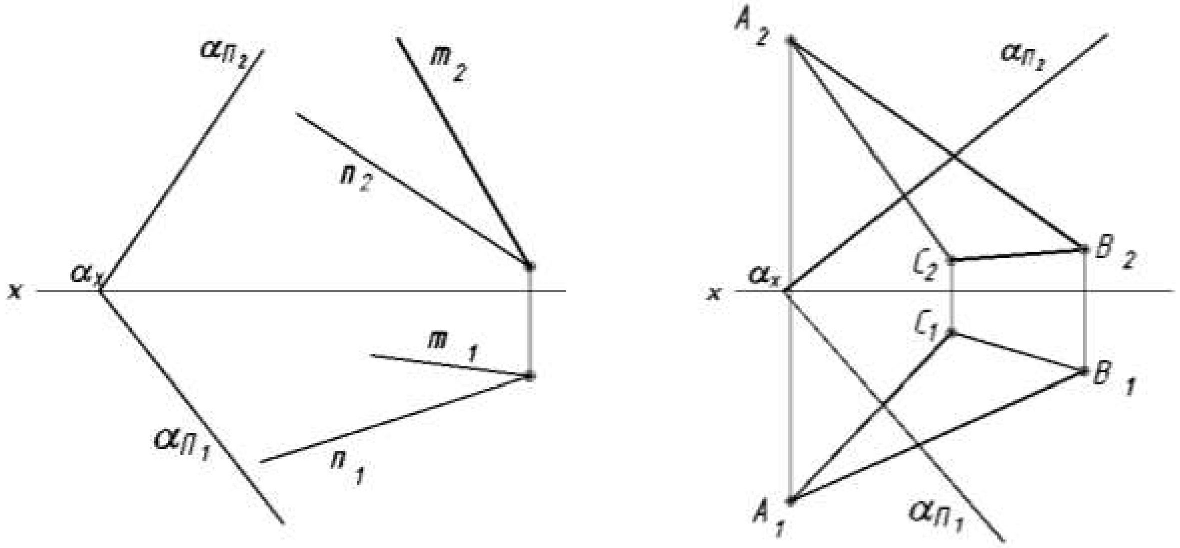
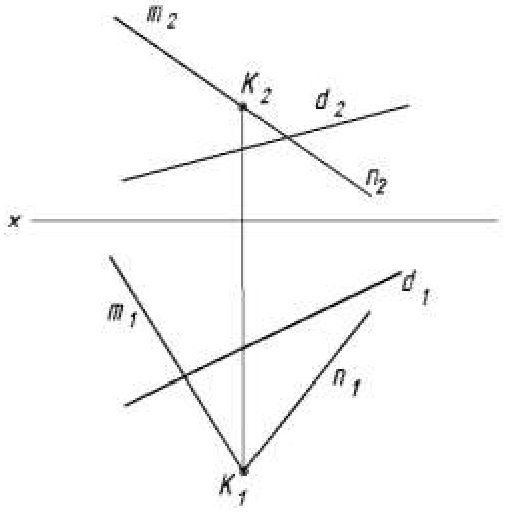


Рис.125

Задача 6. Определить точку пересечения прямой линии с плоскостью (рис.126 - 129). Определить видимость с помощью конкурирующих точек. Указать положение плоскости и заданной прямой d относительно плоскостей проекций.



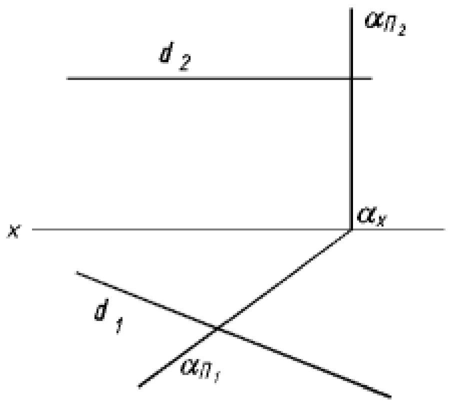
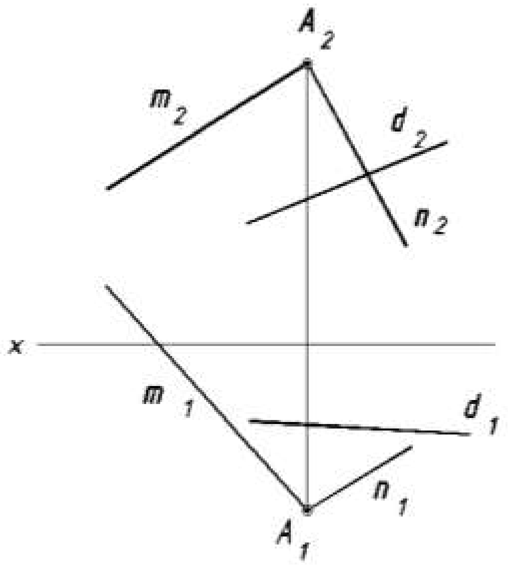


Рис.126



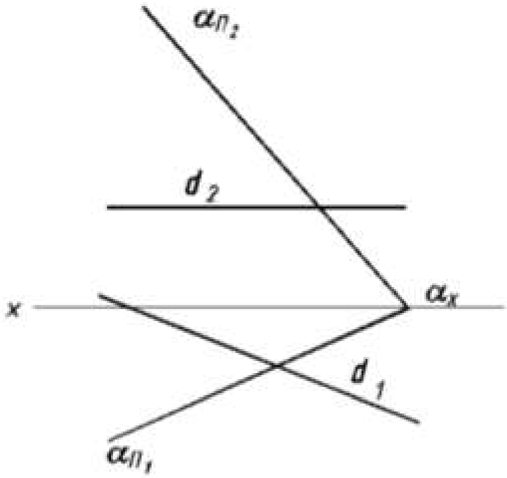
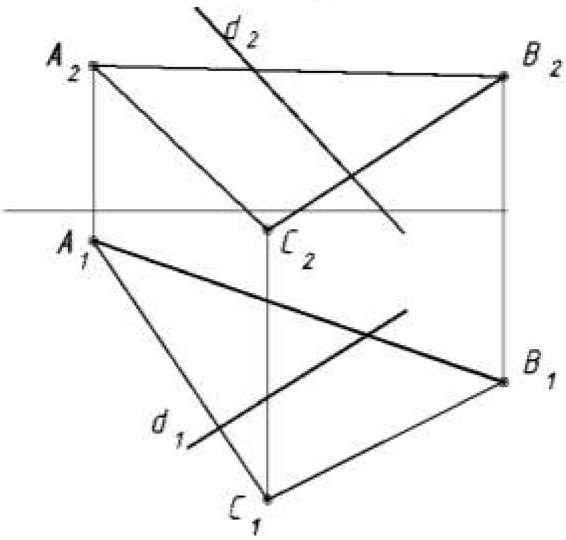


Рис.127



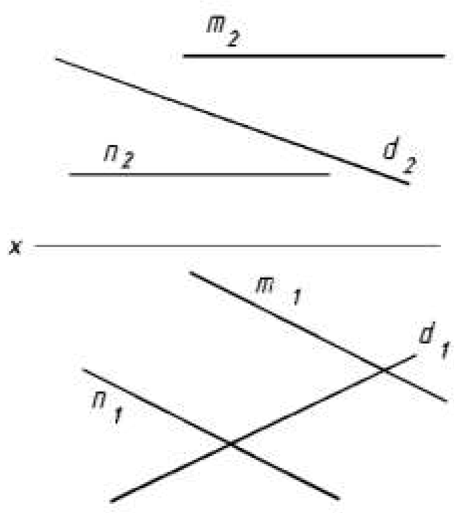


Рис.128

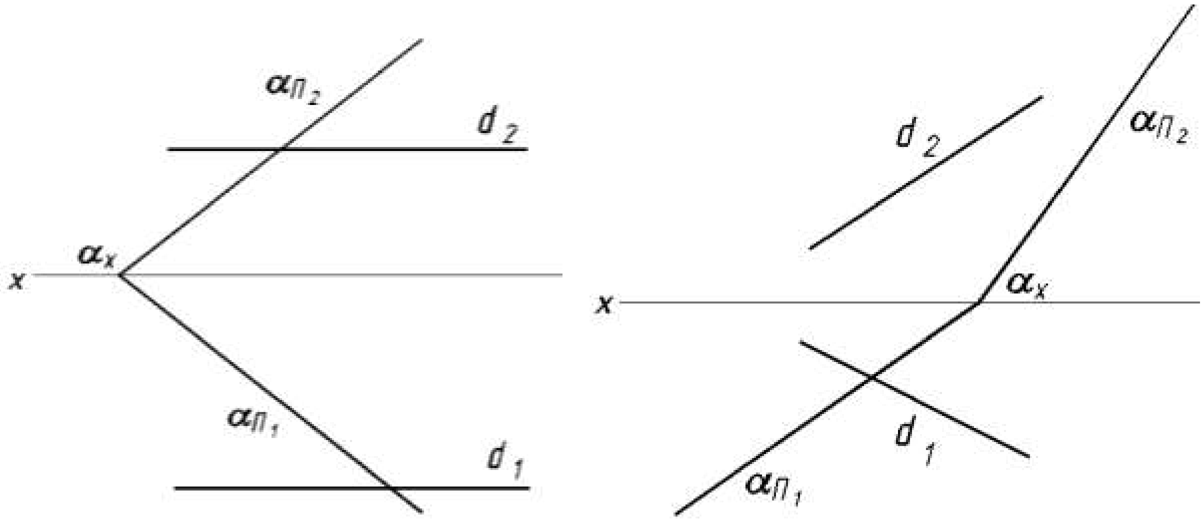


Рис.129

Задача 7. Определить, взаимное положение прямой линии d и плоскости Σ (рис.130 - 132).

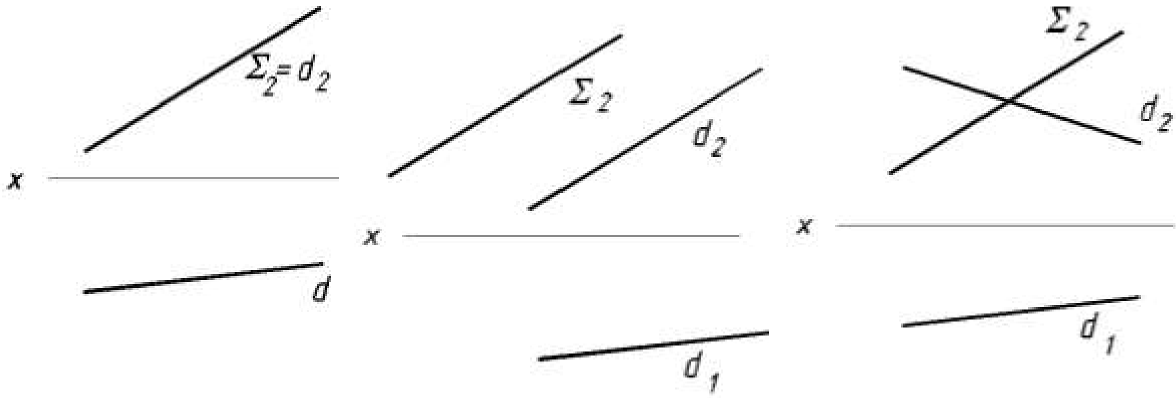


Рис.130

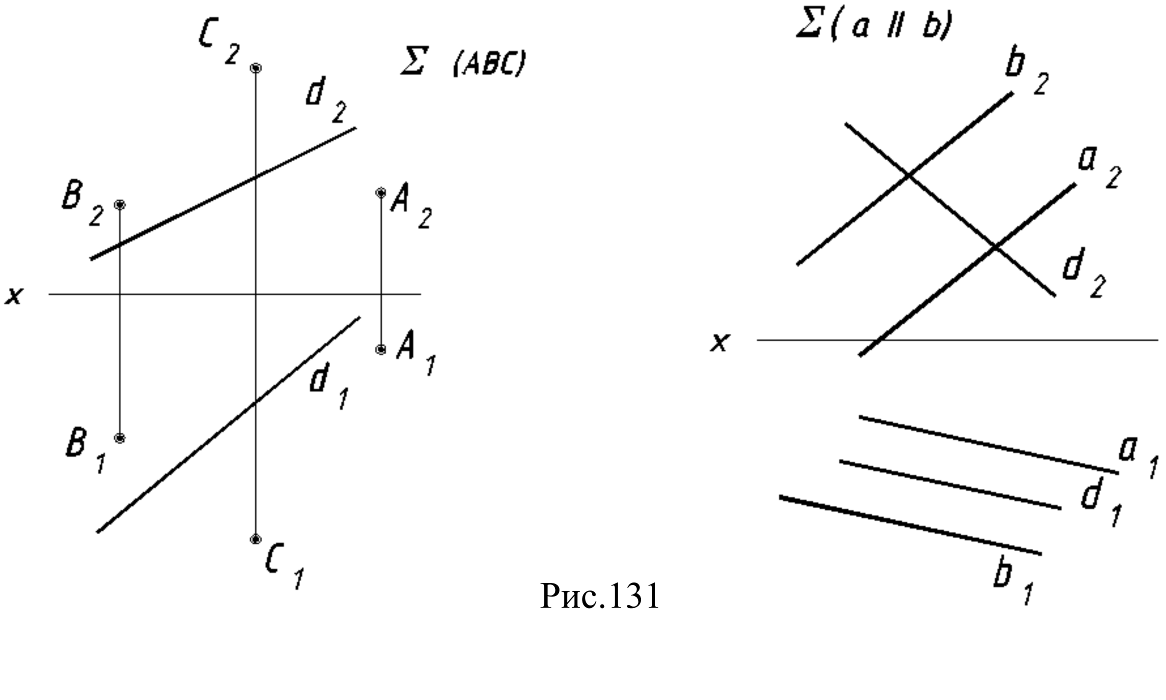
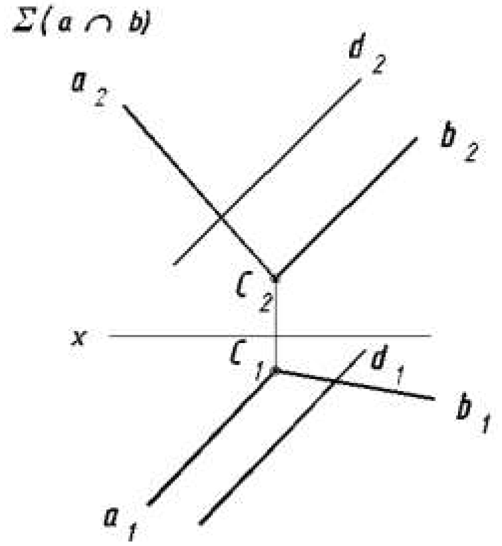


Рис.131



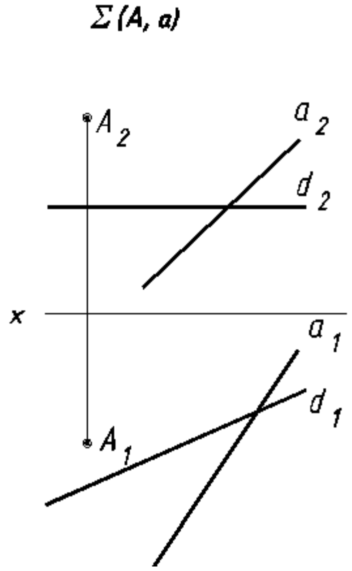
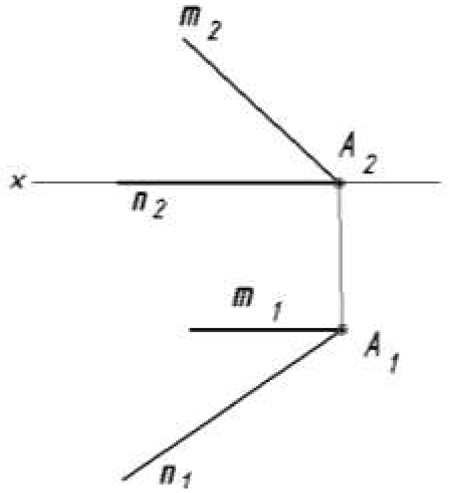


Рис.132

Задача 8. Из точки А, принадлежащей плоскости, провести прямую линию, перпендикулярную заданной плоскости и длиной 40 мм (рис.133).



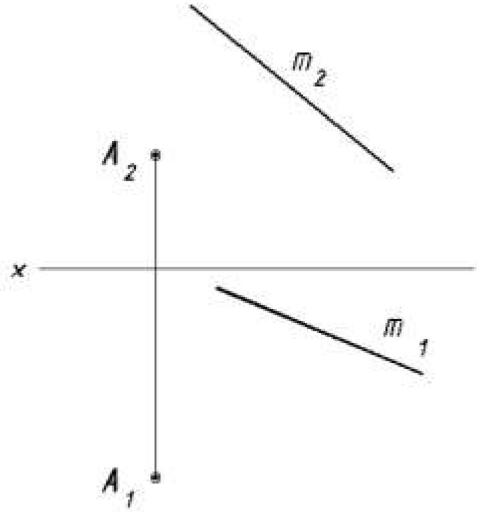
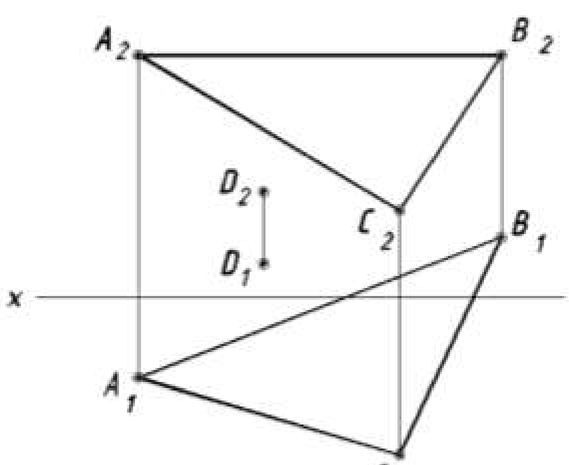


Рис.133

Задача 9. Определить расстояние от точки D до плоскости АВС и α (рис.134).



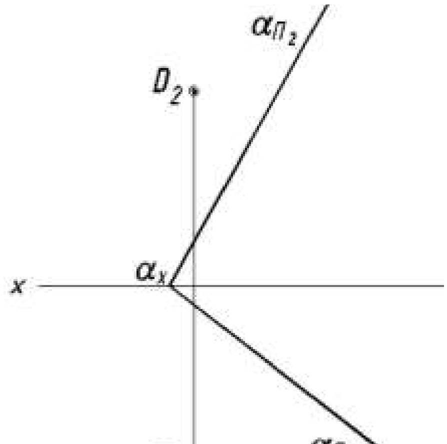


Рис.134

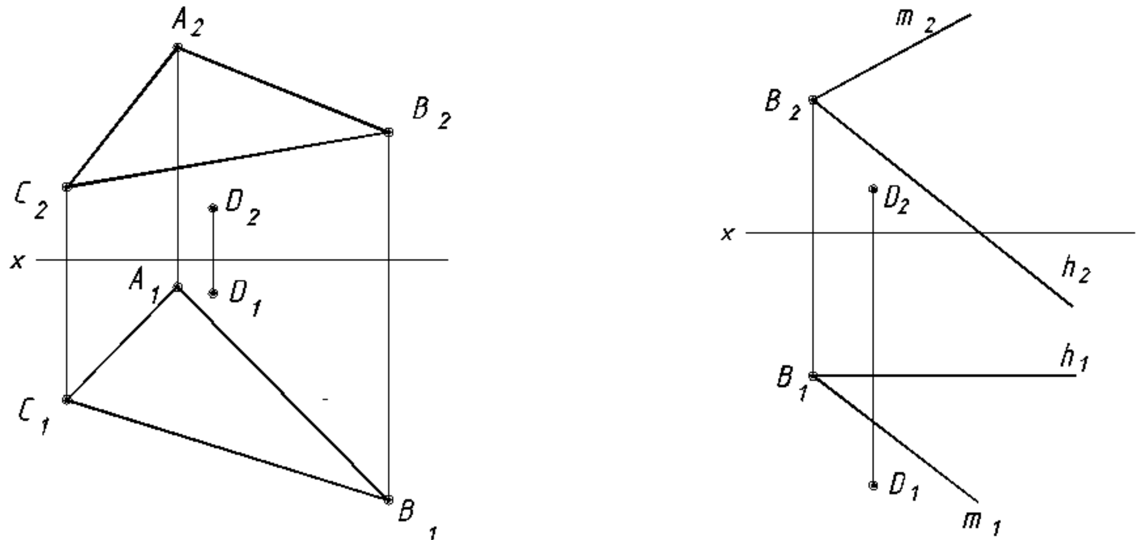
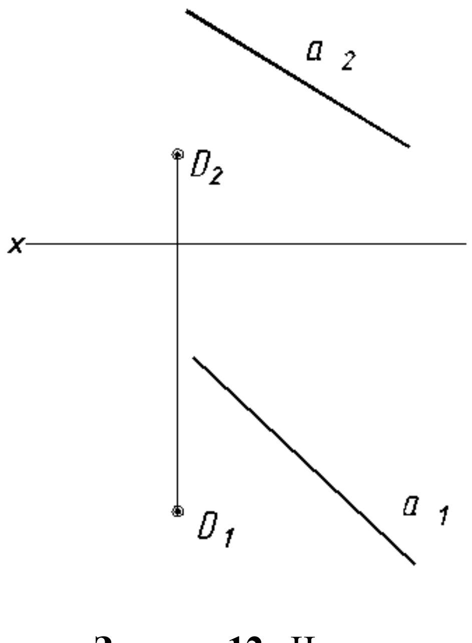


Рис.135

Задача 10. Построить точку К, симметричную точке D относительно заданной плоскости. Указать видимость прямой линии (рис.135).

Задача 11. Через точку D построить плоскость, перпендикулярную заданной прямой. Определить точку пересечения этой прямой с построенной плоскостью, указать видимость (рис.136).



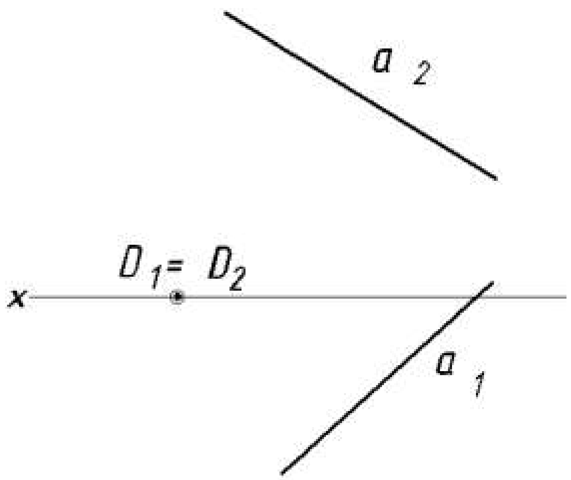


Рис.136

Задача 12. Через точку D провести плоскость, перпендикулярную заданной плоскости, определить линию пересечения этих плоскостей, указать видимость (рис.137 - 138).

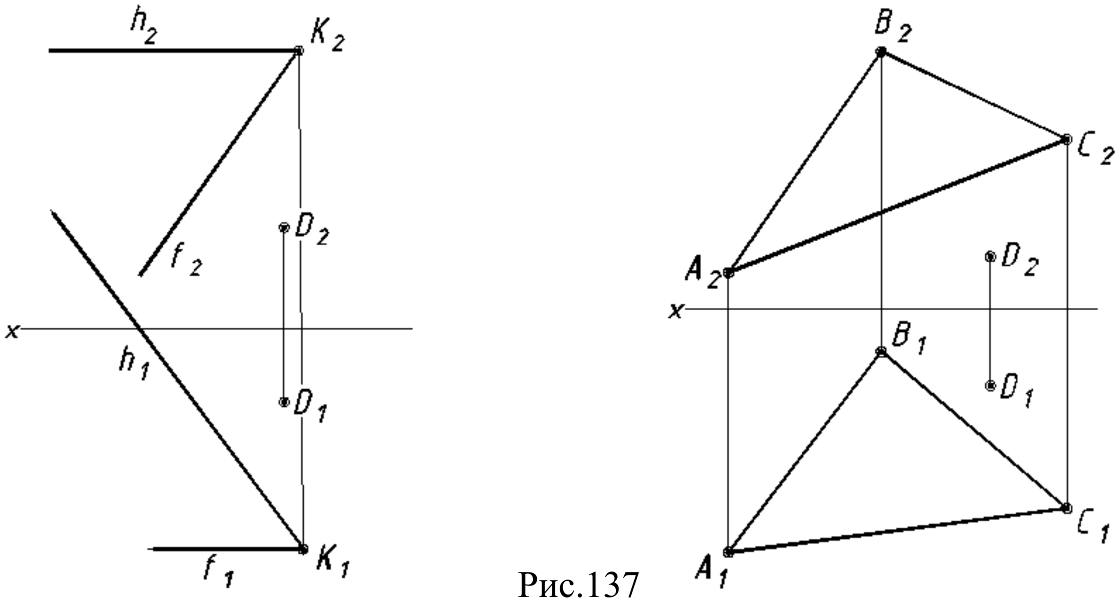


Рис.137

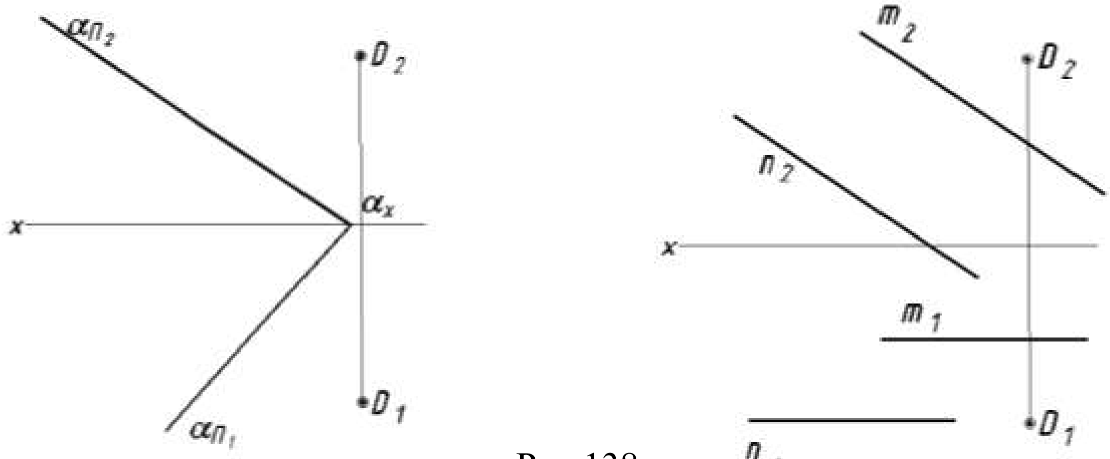


Рис.138

Задача 13. Через прямую d провести плоскость, перпендикулярную заданной плоскости. Построить линию пересечения плоскостей. Определить их видимость с помощью конкурирующих точек (рис.139).

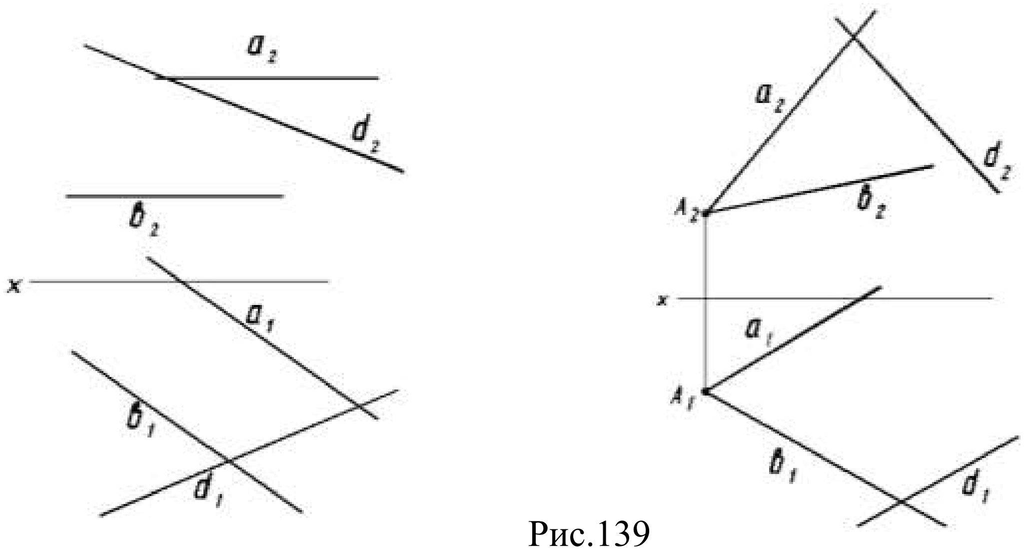


Рис.139

Задача 14. Определить линию пересечения плоскости α с плоскостью β, если известны фронтальный след $\beta\Pi_2$ и фронтальная проекция точки L, принадлежащая линии пересечения (рис.140).

Задача 15. Построить проекции прямой трехгранной призмы высотой 45 мм. Основание ABC призмы принадлежит заданной плоскости P (рис. 141).

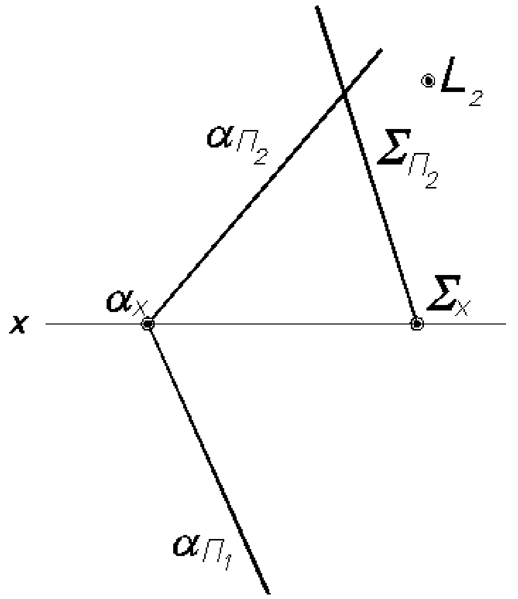


Рис.140

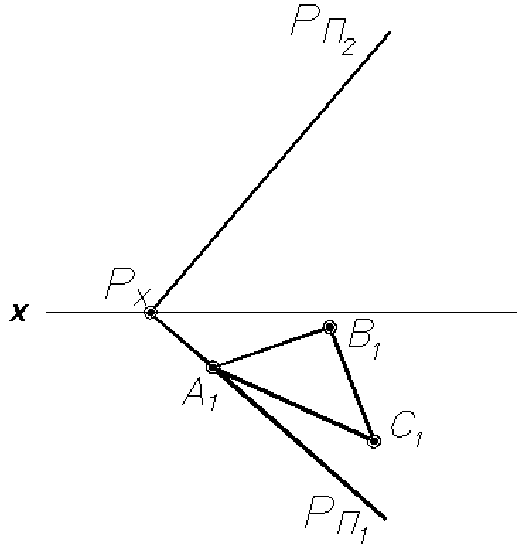


Рис.141

Задача 16. Построить прямую призму высотой 40 мм, основание которой задано треугольником ABC (рис. 142).

Задача 17. Провести плоскость P, параллельную плоскости треугольника ABC, так, чтобы отрезок заданной прямой m, заключенный между плоскостями имел длину 30 мм (рис.143).

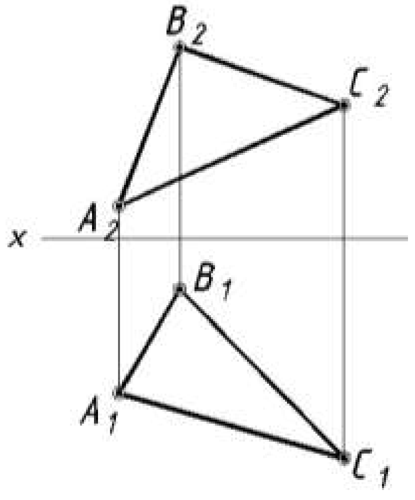


Рис. 142

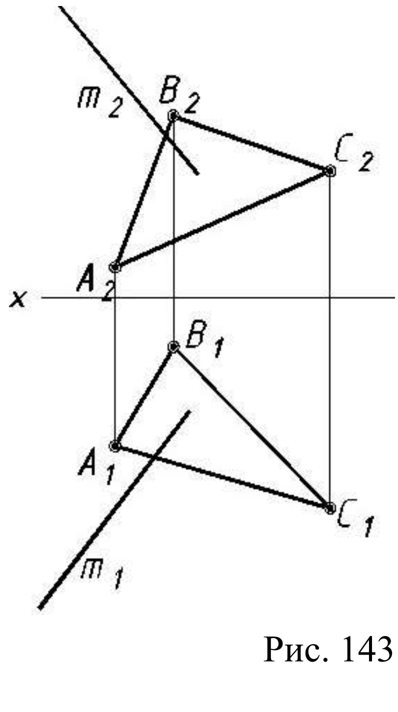


Рис. 143

4. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

4.1. Сущность метода

Проектирование и строительство жилых, общественных и промышленных зданий и сооружений не может осуществляться без инженерной подготовки и благоустройства территорий.

При решении конструктивных задач по проектированию объектов, имеющих размеры в плане существенно больше размеров по высоте, не удобно осуществлять проецирование на две или три плоскости проекций. Планом называется проекция геометрического объекта на горизонтальную плоскость проекций. Поэтому в строительстве при проектировании и возведении инженерных сооружений таких, как дорог, путепроводов, гидротехнических сооружений, транспортных развязок, аэродромов и т.д. выполняются чертежи в проекциях с числовыми отметками, т.е. изображается план объекта на горизонтальной плоскости проекций, а размеры по высоте указываются отметками. При этом применяется метод ортогонального проецирования.

Отметка – это число, которое указывает расстояние от точки объекта до некоторой горизонтальной плоскости проекций $П_О$ (плоскости нулевого уровня) и позволяет судить о размерах и положении изображенного объекта.

Точка в проекциях с числовыми отметками изображается ее горизонтальной проекцией с указанием отметки (рис.144). Если точки расположены над плоскостью проекций, то их отметки считаются положительными, если под плоскостью проекций – отрицательными. Отметки точек, принадлежащих плоскости проекций, называются нулевыми.

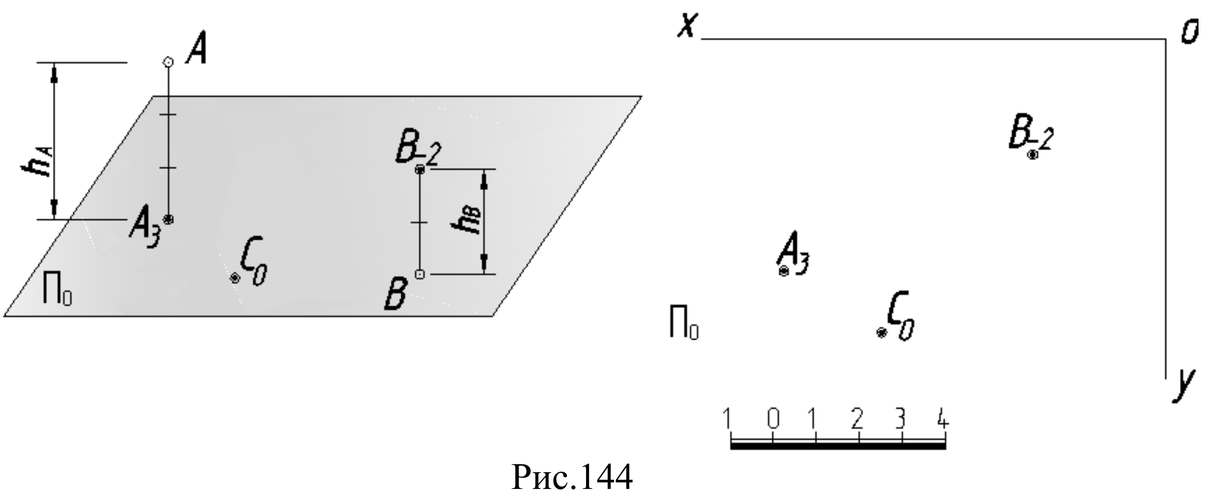


Рис.144

Положение всех точек на плане определяется координатами x и y, а координата z указывается числовой отметкой. Точка A на рис.144

находится над плоскостью нулевого уровня на высоте 3 линейных единиц, поэтому отметка этой точки равна 3, точка В под плоскостью на расстоянии двух линейных единиц, следовательно ее отметка равна –2, отметка точки С равна 0, т.к. эта точка принадлежит плоскости нулевого уровня $П_О$.

4.2. Прямая линия

Прямая линия задается двумя точками с отметками (рис.145). Прямую линию можно также задать точкой и углом наклона φ к плоскости нулевого уровня (рис.146). Вместо угла можно указать уклон прямой линии i . **Уклон** прямой линии – это тангенс угла наклона $i = tg\varphi$.

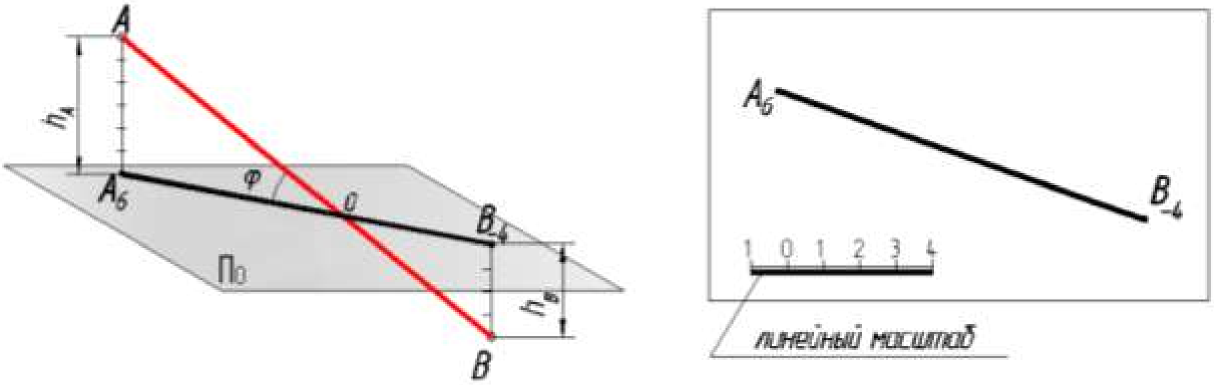


Рис. 145

А т.к. тангенс угла в прямоугольном треугольнике есть отношение противолежащего катета к прилежащему, то **уклон прямой - есть** отношение разности отметок концевых точек отрезка прямой к горизонтальной проекции. Длину горизонтальной проекции отрезка прямой на плоскость нулевого уровня называют **заложением *L*** (рис.145 и 147). Направление спуска указывают стрелкой, острие которой направлено от точки с большей отметкой к точке с меньшей отметкой.

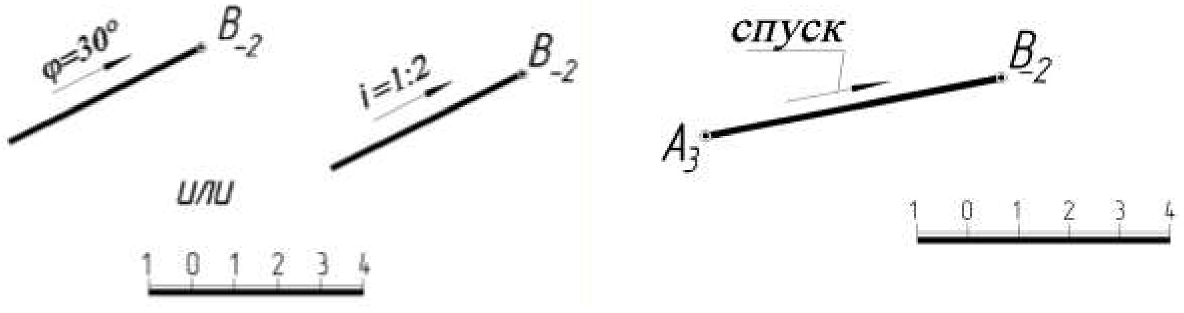


Рис.146

4.2.1. Градуирование прямой линии

При решении позиционных задач прямая линия градуируется.

Градуирование прямой (рис.147) – это определение точек прямой, отметки которых равны целым числам и отличаются друг от друга на единицу длины. Для того, чтобы проградуировать прямую, строят ее фронтальную проекцию, считая, что ось x проходит вдоль горизонтальной проекции прямой.

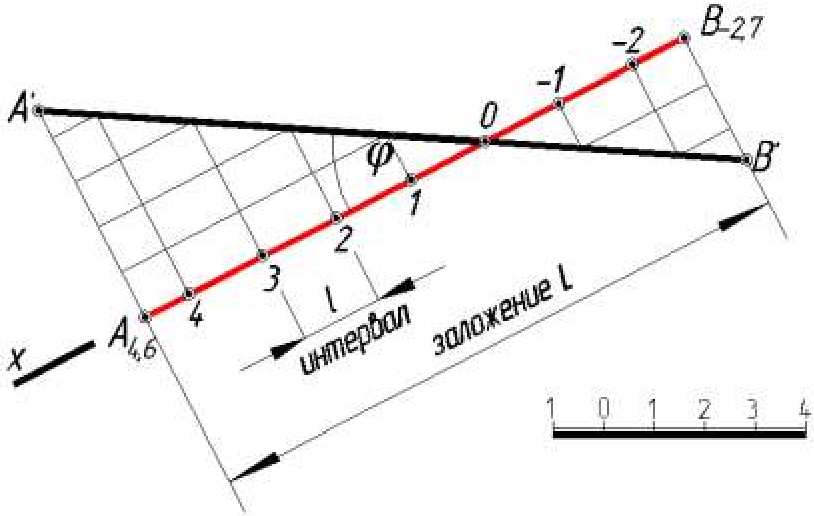


Рис.147

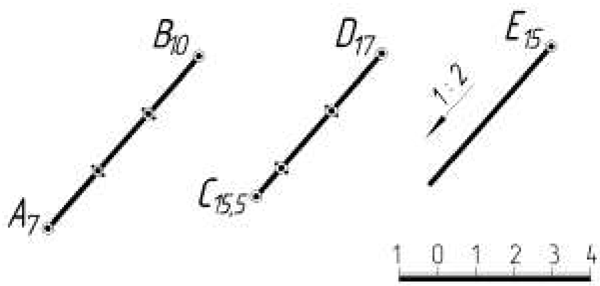
При этом определяется действительная величина отрезка [A'B'] = [AB], а также угол наклона φ прямой к плоскости нулевого уровня.

Заложение отрезка прямой при разности отметок концевых точек отрезка, равной единице, называется интервалом (l). Уклон и интервал прямой величины обратные: $i = tg\varphi = 1/l$, чем больше уклон, тем меньше интервал, и наоборот.

Уклон линии может быть задан в градусах, процентах, промиллях (промилле – одна тысячная часть какого-либо числа, десятая часть процента) и дробью $1/n$, где n – любое положительное число.

4.2.2. Взаимное расположение прямых линий

Прямые линии в пространстве параллельны, пересекаются и скрещиваются (рис.148-150).



Прямые в пространстве параллельны, если:
- проекции параллельны;
- одинаковое направление спуска;
- один и тот же интервал, а значит и уклон.

Рис.148

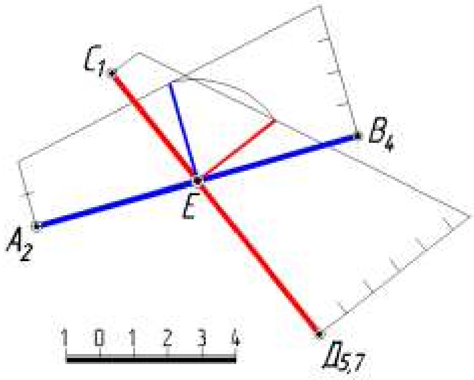


Рис.149

Прямые в пространстве пересекаются, если пересекаются их проекции в плане и в точке пересечения проекций прямые имеют одинаковые числовые отметки.

Для определения взаимного положения прямые градуируются.

АВ и CD в точке Е пересекаются, т.к. отметка точки на прямой АВ равна отметке точки на прямой CD

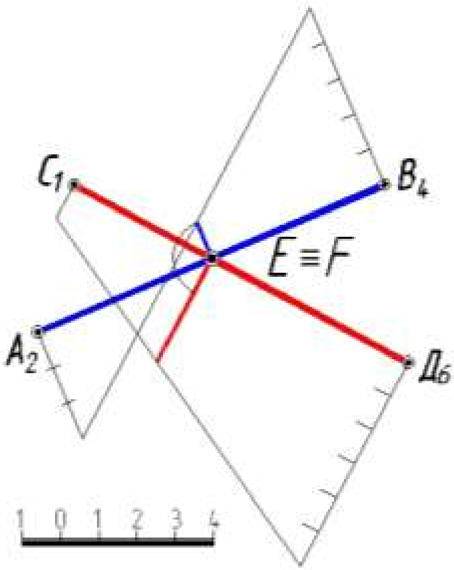


Рис.150

Прямые линии в пространстве скрещиваются, если проекции этих прямых и числовые отметки их точек не удовлетворяют признакам параллельности и пересечения прямых.

АВ и CD – скрещивающиеся прямые, т.к. отметка точки $E \in AB$ меньше, чем отметка точки $F \in CD$.

E и F – конкурирующие точки.

4.3. Плоскость

4.3.1. Проекции и градуирование плоскости

В проекциях с числовыми отметками плоскость принято задавать одним из трех способов.

1. Проекциями прямых и точек:
   - проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой;
   - проекциями двух параллельных прямых, при этом могут быть заданы отметки начальных точек и уклон;
   - проекциями двух пересекающихся прямых.
2. Прямой линией и величиной уклона плоскости.
3. Масштабом уклона плоскости.

При решении задач обычно плоскость требуется **проградуировать, т.е. построить горизонтали плоскости, отметки которых равны целым числам и отличаются на единицу длины.** Горизонталь – это линия, параллельная плоскости нулевого уровня.

Рассмотрим пример градуирования плоскости, заданной тремя точками $A_6B_4C_9$ (рис.151). Градуируется сторона треугольника с наибольшей разницей отметок. Проводится шестая горизонталь, соединив две точки с отметками «6». Все остальные горизонтали проводятся параллельно. Перпендикулярно горизонталям в плоскости P(ABC) проводится линия наклона к горизонтальной плоскости проекций (линия ската). Градуированная проекция линии ската плоскости называется **масштабом уклона (**P_i). Масштаб уклона плоскости изображается двумя параллельными прямыми (утолщенной 0,5 …0,7 мм и тонкой толщиной 0,15…0,2 мм) и обозначается той же буквой, что и плоскость с индексом ***i*.** Построив фронтальную проекцию отрезка линии ската, определяется угол наклона φ заданной плоскости P_i к плоскости нулевого уровня $П_0$. Интервал линии ската является интервалом плоскости $l_{пл}$ и измеряется по масштабу уклона. Уклон плоскости есть тангенс угла наклона φ к плоскости нулевого уровня $П_0$ ($i_{пл} = tg\varphi$). Уклон плоскости есть величина, обратная интервалу плоскости $i_{пл} = 1/ l_{пл}$**.** Плоскость имеет спуск вдоль линии ската от горизонталей с большими отметками в сторону понижения отметок.

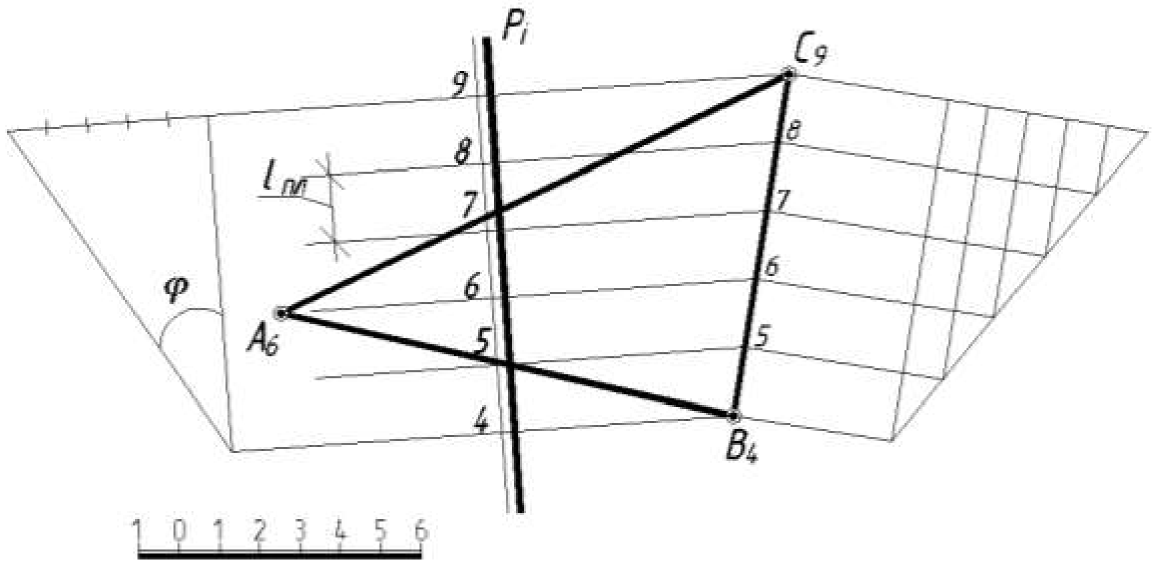


Рис.151

Масштаб уклона определяет положение плоскости в пространстве. Если известен уклон плоскости или угол наклона к $П_0$, направление спуска и хотя бы одна горизонталь, то положение плоскости в пространстве становится определенным.

При решении инженерных задач плоскость приходится ориентировать относительно меридиана Земли. Угол простирания δ и уклон плоскости определяют положение плоскости относительно сторон света.

Рис. 152

Если смотреть вдоль линии ската в сторону спуска плоскости, то **направление простирания** плоскости принимается влево. Угол δ между северной стороной магнитной стрелки компаса и направлением простирания, измеренный против часовой стрелки называется **углом простирания плоскости**.

4.3.2. Точка и прямая линия в плоскости

Рассмотрим пример, в котором определяется положение точек относительно плоскости общего положения.

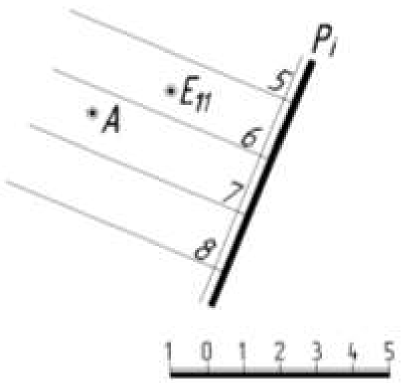


Рис.153

Масштабом уклона задана плоскость Р.
1. Определить отметку точки А при условии, что она принадлежит плоскости Р, заданной масштабом уклона.
2. Определить положение точки Е относительно плоскости Р.

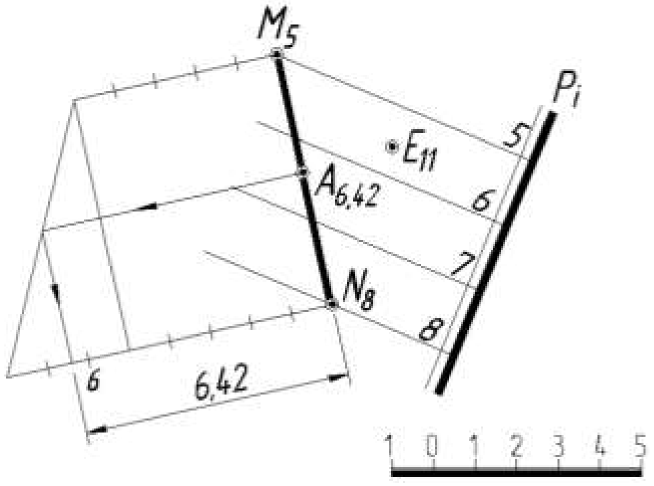


Рис.154

Решение: 1. Для того, чтобы определить отметку точки А, нужно провести через эту точку прямую MN, принадлежащую плоскости, проградуировать ее и измерить координату точки А.
2. При определении положения точки Е можно утверждать, что точка не принадлежит плоскости, т.к. проекция точки Е находится между горизонталями 5 и 6 плоскости Р. Следовательно, точка Е с отметкой 11 находится выше плоскости Р.

4.3.3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве плоскости либо параллельны друг другу, либо пересекаются.

Две **плоскости параллельны**, если:

- горизонтали обеих плоскостей параллельны;
- одинаков уклон этих плоскостей;
- совпадает направление спуска.

Не выполнение одного из признаков достаточно, чтобы утверждать, что плоскости не параллельны.

Пересекающиеся плоскости

Линия пересечения двух плоскостей проходит через точки пересечения однозначных горизонталей этих плоскостей. Плоскости пересекаются по прямой линии, следовательно, для ее построения достаточно определить точки пересечения двух пар однозначных горизонталей.

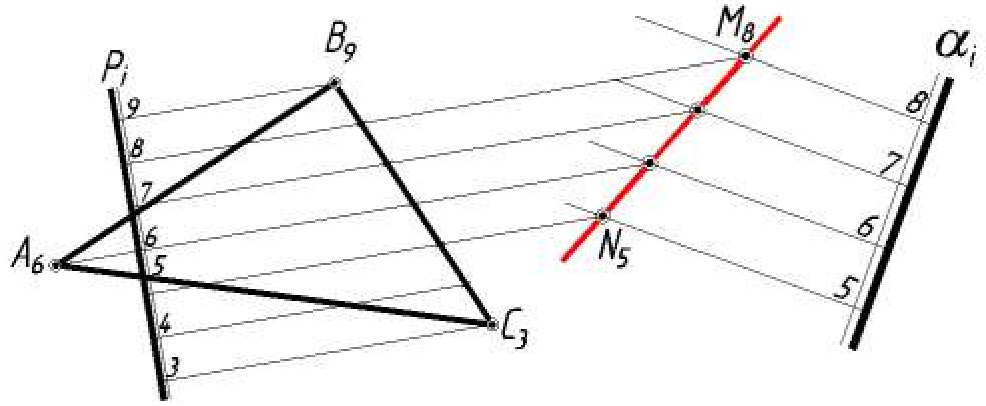


Рис. 155

Плоскость **P** (рис. 155), заданная треугольником $A_6B_9C_3$, пересекается с плоскостью **α,** заданной масштабом уклона, по прямой линии M_8N_5, которая проходит через точки пересечения однозначных горизонталей заданных плоскостей.

4.3.4. Взаимное расположение прямой линии и плоскости

Чтобы решить задачу о взаимном расположении прямой и плоскости, необходимо прямую линию заключить во вспомогательную плоскость, определить линию пересечения этих плоскостей, и если:

- линия пересечения совпадает с заданной прямой, то прямая принадлежит плоскости;

– линия пересечения параллельна заданной прямой, то прямая параллельна плоскости;

– линия пересечения пересекается с прямой, то заданная прямая линия пересекается с плоскостью и отмечается точка пересечения.

На рисунках 156 и 157 рассматриваются задачи по определению точки пересечения прямой AB с заданной плоскостью.

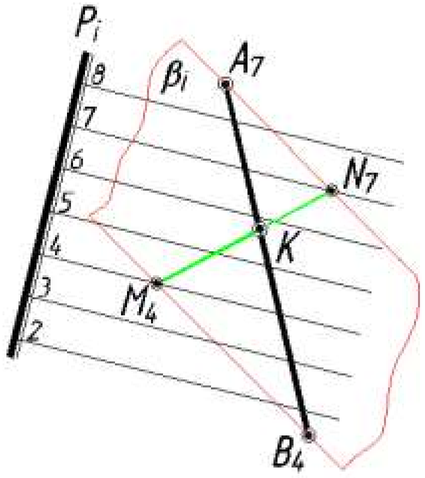


Рис.156

Заданы: плоскость P масштабом уклона и прямая A_7B_4. Определить их взаимное расположение (рис.156). Вспомогательная плоскость β общего положения, в которую заключается прямая AB, на чертеже задается двумя горизонталями: седьмой и четвертой, проходящими соответственно через точки прямой A и B. Строится линия пересечения MN двух плоскостей P и β, которая проходит через точки пересечения одноименных горизонталей 4 и 7.

$$MN \cap AB = K \quad \Rightarrow \quad AB \cap P = K$$

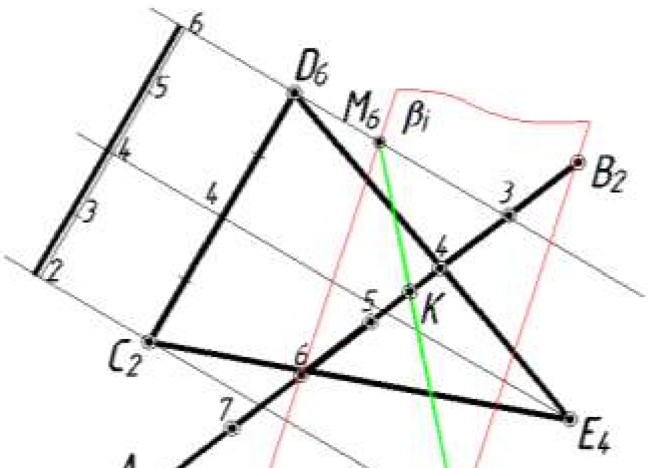


Рис.157

Заданы: плоскость $P(C_2D_6E_4)$ и прямая A_8B_2. Определить их взаимное расположение (рис.157).

Прежде всего, градуируются плоскость $C_2D_6E_4$ и прямая A_8B_2.

Прямая AB заключается во вспомогательную плоскость β общего положения, которая на чертеже задается двумя горизонталями: второй и шестой, проходящими соответственно через точки прямой B_2 и 6.

Строится линия пересечения MN плоскостей P(CDE) и β, которая проходит через точки пересечения одноименных горизонталей 2 и 6. Отмечается точка K пересечения прямой с плоскостью.

$$MN \cap AB = K \Rightarrow AB \cap CDE = K$$

4.3.5. Прямая линия, перпендикулярная плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в том числе и линии ската.

На рис.158 изображена плоскость **P**, наклоненная к плоскости нулевого уровня под углом α. Прямая **n** перпендикулярна плоскости **P**, угол между ними равен 90°. А угол наклона прямой **n** к плоскости нулевого уровня равен ($90^o - \alpha$). Так как уклон плоскости равен $\boldsymbol{i_{пл} = tg\ \alpha}$, то уклон прямой, перпендикулярной этой плоскости равен

$$\boldsymbol{i_{пр} = tg\ (90^o - \alpha) = ctg\ \alpha.}$$

Уклон плоскости и уклон прямой, перпендикулярной к плоскости, обратно пропорциональны. Отсюда следует, что интервал $\boldsymbol{l_{пл} = 1/\,l_{пр}}$, где $\boldsymbol{l_{пл}}$ – интервал линии ската плоскости, $\boldsymbol{l_{пр}}$ – интервал прямой, перпендикулярной плоскости.

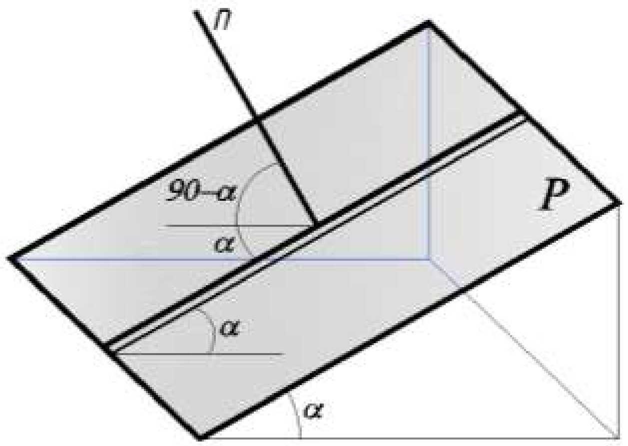


Рис.158

$$\alpha = P \wedge П_o\ ;$$
$$n \perp P\ ;$$
$$(90^o - \alpha) = n \wedge П_o\ ;$$
$$i_{пл} = tg\ \alpha,$$
$$i_{пр} = tg\ (90^o - \alpha) = ctg\ \alpha$$
$$l_{пл} = 1/\,l_{пр}$$

Эта зависимость используется при графическом определении интервала прямой, перпендикулярной плоскости

Задача (рис.159)**.** Масштабом уклона P_i задана плоскость общего положения. Из точки F_{11}, принадлежащей плоскости P, восстановить прямую n, перпендикулярную плоскости P.

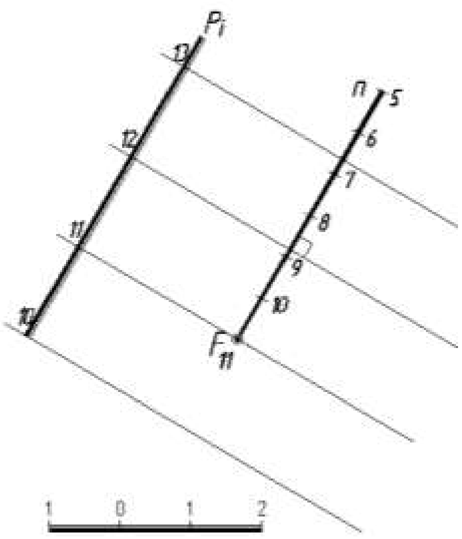
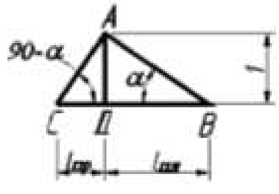


Рис.159

Градуируется плоскость P: проводятся горизонтали плоскости, перпендикулярно масштабу уклона.

Горизонтальная проекция прямой **n** проводится перпендикулярно горизонталям. Графическим методом определяется интервал прямой **n**, для этого строим прямоугольный треугольник ABC,



где AD = 1 лин.ед. по линейному масштабу;

$\boldsymbol{DB = l_{пл}}$ – интервал плоскости, измеренный по масштабу уклона;
угол $\boldsymbol{A = 90^o}$, угол $\boldsymbol{B = \alpha}$ - угол наклона плоскости к плоскости нулевого уровня $П_0$, угол $\boldsymbol{C = (90^o - \alpha)}$ – угол наклона прямой n к плоскости нулевого уровня $П_0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{CD = l_{пр}}$ – интервал прямой $\boldsymbol{n}$, перпендикулярной плоскости Р. Далее градуируется прямая $\boldsymbol{n}$.

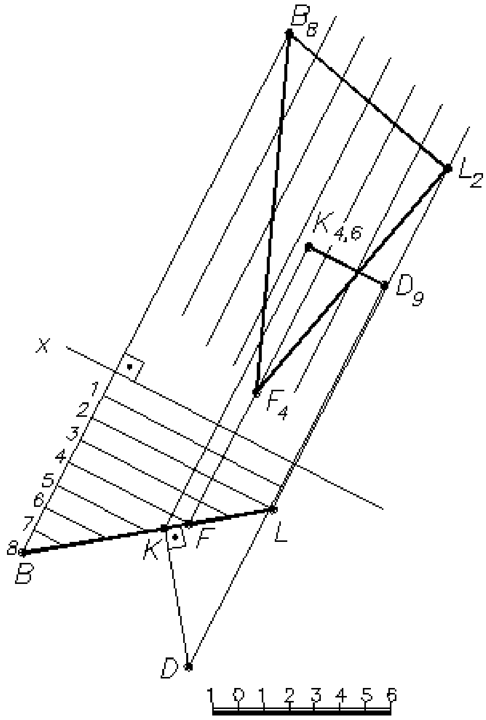


Рис.160

Задачу по построению перпендикуляра к плоскости в проекциях с числовыми отметками можно решить при использовании фронтальной проекции заданных геометрических форм. При этом систему координат из двух плоскостей проекций принимают таким образом, чтобы фронтальная плоскость проекций была перпендикулярна заданной плоскости $B_8F_4L_2$ (рис.160).
Ось x располагают перпендикулярно горизонталям плоскости и по заданным отметкам точек (координата z) строят фронтальные проекции плоскости и точки D. Из точки D восстанавливают перпендикуляр DK к плоскости (проекция плоскости – прямая линия BFL), который на фронтальную плоскость проецируется без искажения.
Точка К является точкой пересечения перпендикуляра с плоскостью. Затем строится горизонтальная проекция DK, перпендикулярно горизонталям и параллельно оси ох. По фронтальной проекции точки К определяется ее отметка.

Вопросы для самопроверки

1. Что собой представляет система координат в проекциях с числовыми отметками?
2. Как задаются точка, прямая линия, плоскость в проекциях с числовыми отметками? Что такое числовая отметка?
3. Что такое градуирование отрезка прямой линии?
4. Что называется заложением отрезка прямой, ее уклоном и интервалом?
5. Какая существует зависимость между уклоном и интервалом прямой?
6. Как определить действительную величину отрезка прямой и угол ее наклона к плоскости нулевого уровня?

7. Как определить отметку точки, принадлежащей прямой линии?
8. Как определить взаимное положение двух прямых линий?
9. Как проградуировать плоскость?
10. Что такое масштаб уклона плоскости?
11. Что называется направлением и углом простирания плоскости?
12. В каком случае точка, прямая принадлежат плоскости?
13. Как определить отметку точки, принадлежащей плоскости?
14. Как построить линию пересечения плоскостей?
15. Как определить видимость двух плоскостей?
16. Как доказать, что изображенные в проекциях с числовыми отметками плоскости параллельны?
17. Как определить взаимное положение прямой линии и плоскости?
18. Как построить прямую, перпендикулярную плоскости? В какой зависимости находятся уклон плоскости и уклон прямой, перпендикулярной плоскости?
19. Как определяется интервал прямой, перпендикулярной плоскости?
20. Как построить взаимно перпендикулярные плоскости.

Задача 1

Построить в проекциях с числовыми отметками точки: D (6,3,7); F(0,5,0); L(2,0,4), K (8,6,-3). Указать, где находятся точки относительно плоскости нулевого уровня.

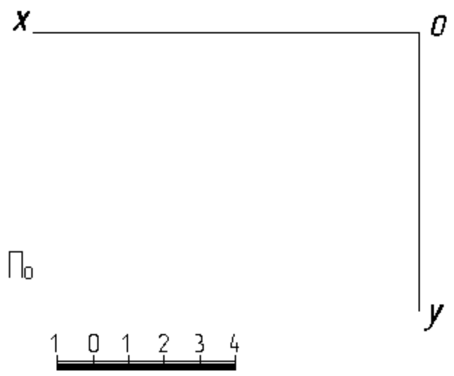


Рис.161

Задача 2. Определить заложение, уклон, интервал, действительную величину отрезков AB и DK, угол наклона их к плоскости нулевого уровня $П_0$ (рис.162).

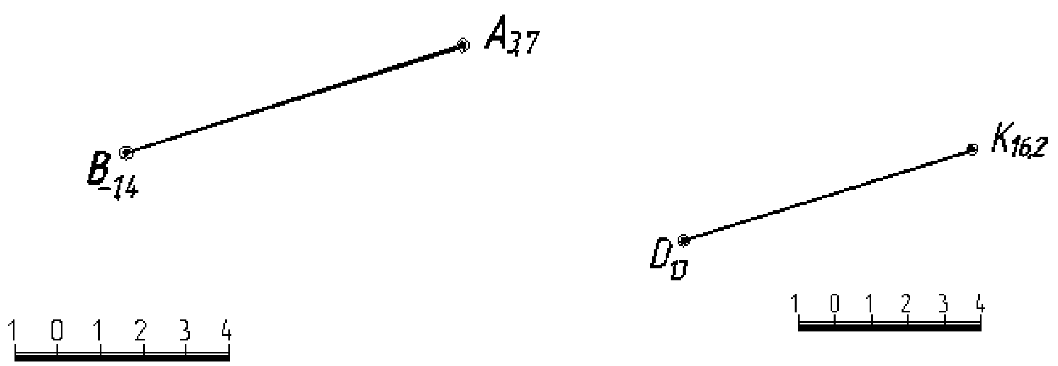


Рис.162

Задача 3. Определить отметку точки С, принадлежащей отрезку прямой АВ. Указать, чему равен уклон и интервал АВ.

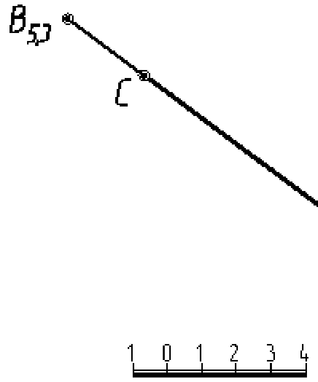


Рис.163

Задача 4. Через точку В провести прямую, параллельную заданной прямой.

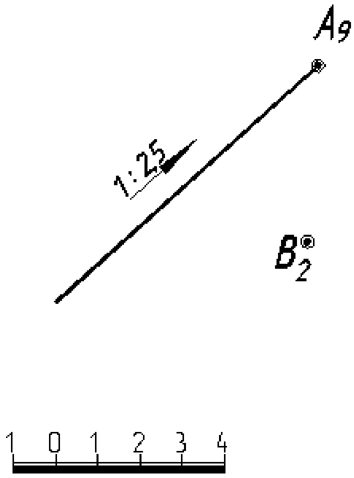


Рис. 164

Задача 5. Определить взаимное положение двух прямых линий (рис.165).

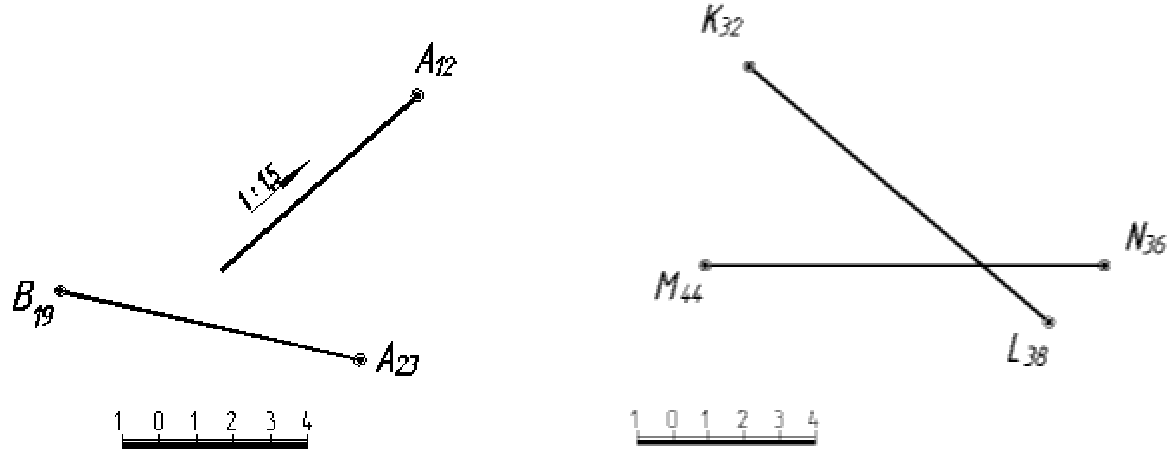
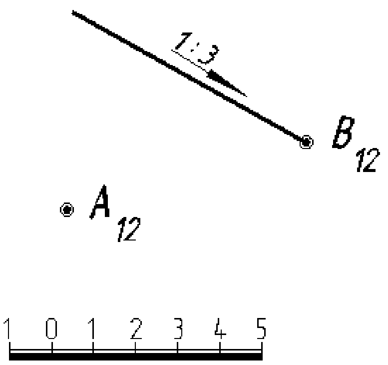


Рис.165

Задача 6. Определить уклон, интервал заданных плоскостей, а также угол наклона их к плоскости нулевого уровня. Одна плоскость задана прямой линией и точкой, а вторая – тремя точками (рис.166).



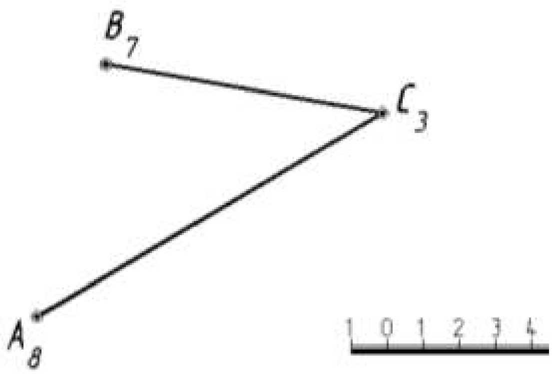


Рис.166

Задача 7. Определить отметки точек A, E, N, принадлежащих плоскостям P и FKC (рис.167).

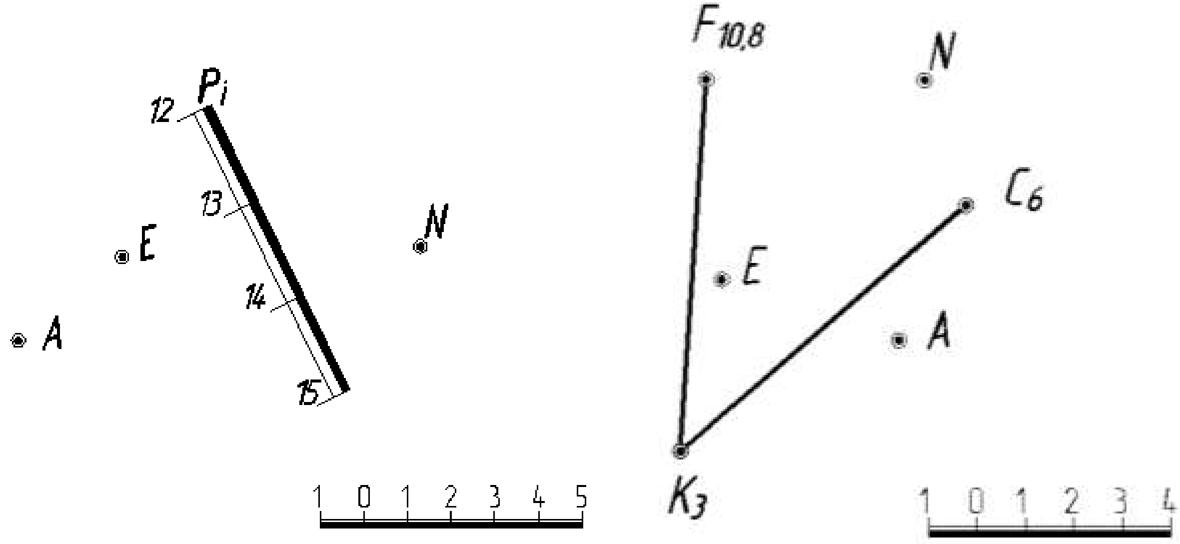


Рис.167

Задача 8. Определить угол и направление простирания плоскостей (рис.168).

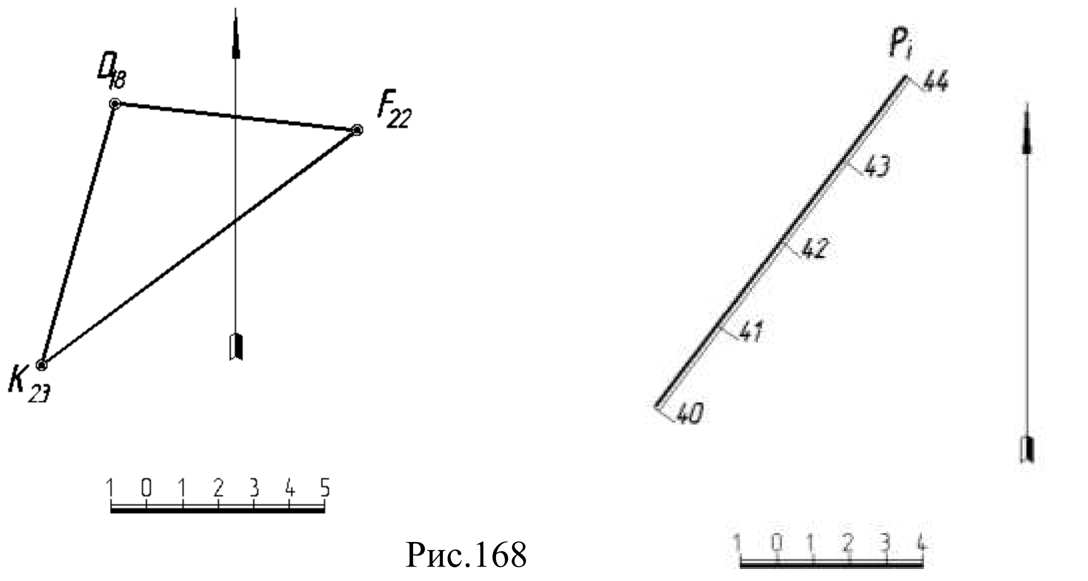


Рис.168

Задача 9. Определить линию пересечения двух плоскостей (рис.169).

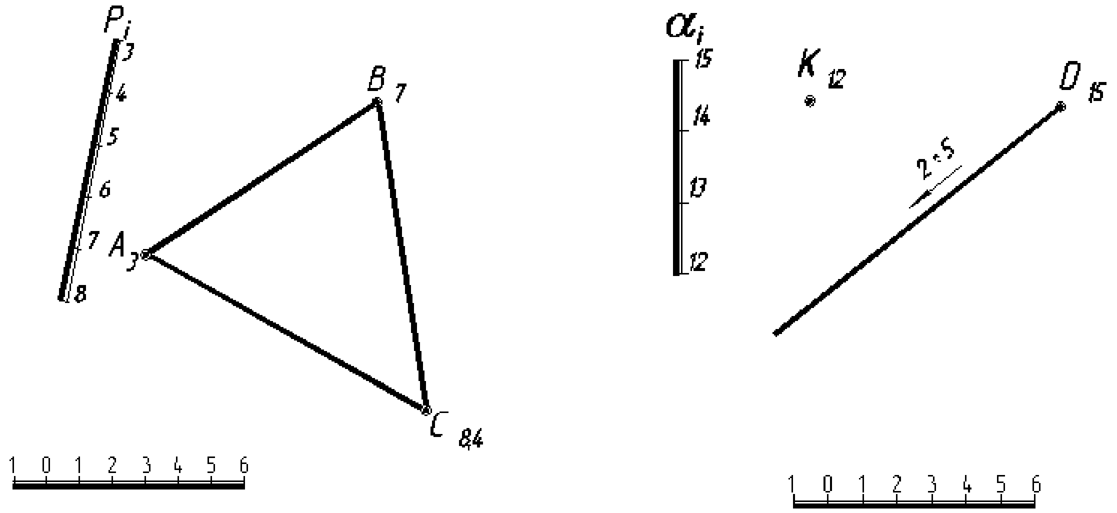


Рис.169

Задача 10. Определить точку пересечения прямой линии с плоскостью (рис.170).

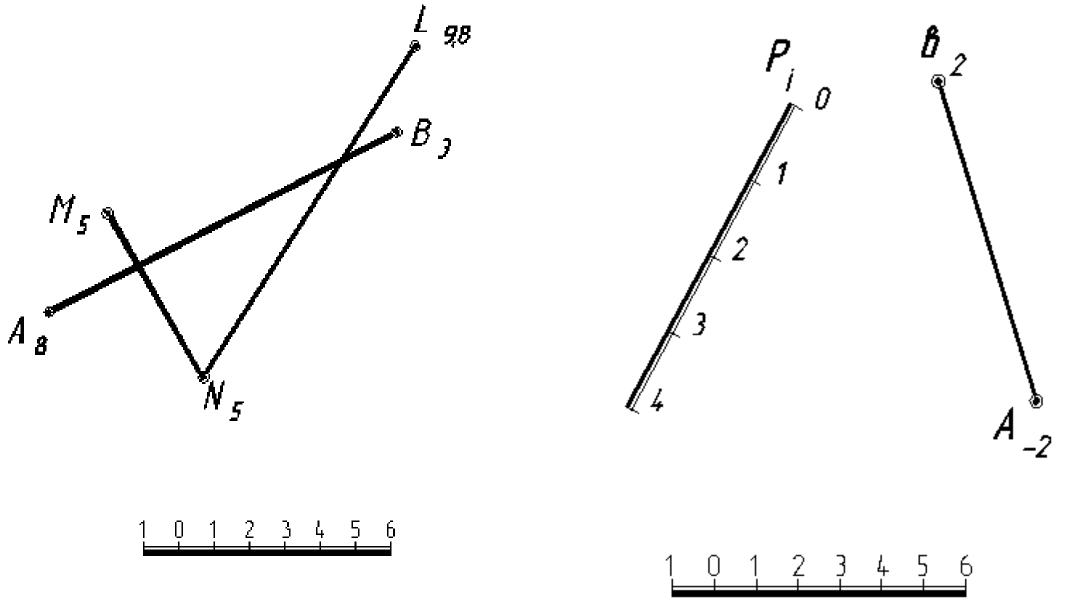


Рис.170

Задача 11. Через заданную точку построить, прямую линию, перпендикулярную заданной плоскости, определить точку пересечения (рис. 171).

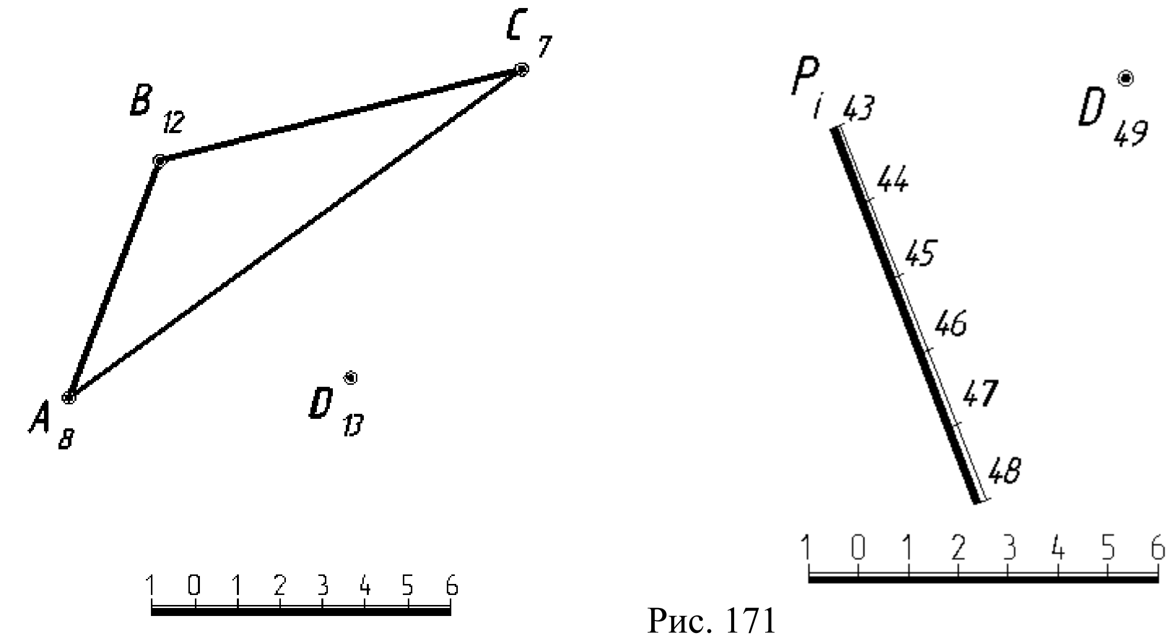


Рис. 171

Задача 12. Из точки В, принадлежащей плоскости, восстановить перпендикуляр длиной 50 мм. В первом случае плоскость задана прямой и точкой D, во втором – двумя пересекающими прямыми (рис.173).

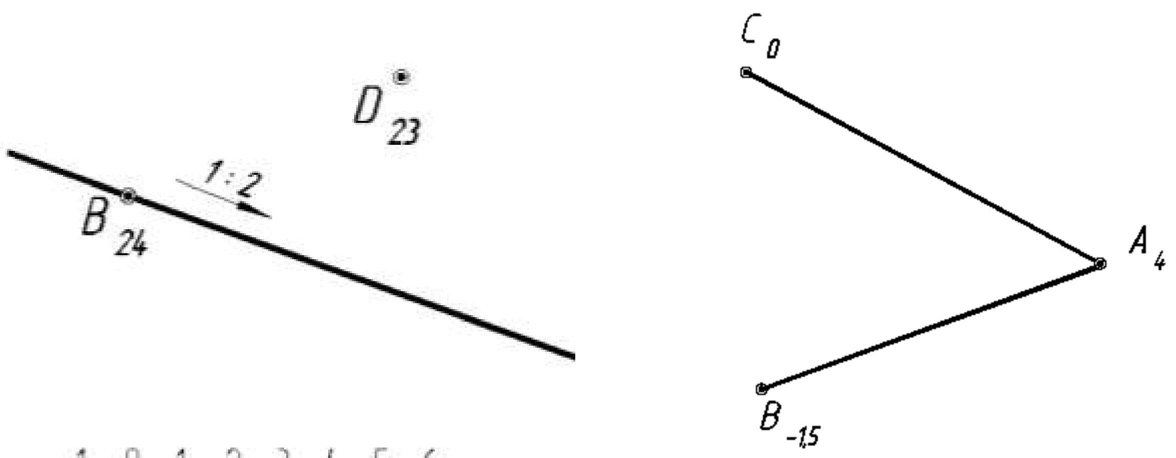


Рис.173

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нартова Л.Г., Якунин В.И. Начертательная геометрия. – М.: Дрофа, 2003. – 208 с.
2. Короев Ю.И. Начертательная геометрия. – М.: Архитектура – С, 2007.- 424 с.
3. Крылов Н.Н., Иконникова Г.С., Николаев В.Л., Васильев В.Е.; под редакцией Крылов Н.Н. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 2007. – 224 с.
4. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1981. – 262 с.
5. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М.: «Наука» Гл.ред.физ.-мат. лит., 1988. – с.
6. Гордон В.О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 2006. – 320 с.
7. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1978. – 445 с.
8. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение. – М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОК, 2005. – 471 с.
9. Брилинг Н.С., Балягин С.Н., Симонин С.И. Справочник по строительному черчению. – М.: Стройиздат, 1987. – 448 с.
10. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1980. – 142 с.
11. Брилинг Н.С. Черчение. – М.: Стройиздат, 1989. – 420 с.
12. Логинов А.Ю. Метод проекций с числовыми отметками. – Нижний Новгород.: Волжская государственная академия водного транспорта, 2000. – 80 с.
13. Миронова Р.С. Инженерная графика. – М.: Высшая школа, 2003. – 288 с.
14. Омшанов А.Б. Начертательная геометрия. – Элиста, 1998. – 80 с.
15. Карпань А.Т. Привязка сооружения к топографической поверхности. – Элиста, 2002. – 16 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Принятые обозначения	3
	Введение	4
1.	КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ	5
1.1.	Метод проекций	5
1.2.	Проецирование точки	6
1.3.	Три основных инвариантных свойства прямоугольного проецирования	8
2.	ПРЯМАЯ ЛИНИЯ	13
2.1.	Задание прямой линии	13
2.2.	Частные случаи положения прямой линии относительно плоскостей проекций	13
2.3.	Определение длины отрезка прямой линии и углов наклона прямой к плоскостям проекций (метод прямоугольного треугольника)	16
2.4.	Следы прямой линии	18
2.5.	Взаимное расположение двух прямых линий	19
2.6.	Проецирование прямого угла	20
3.	ПЛОСКОСТЬ	27
3.1.	Способы задания плоскости	27
3.2.	Построение следов плоскости	28
3.3.	Различные положения заданной плоскости относительно плоскостей проекций	29
3.4.	Прямые линии и точки, расположенные в заданной плоскости	33
3.5.	Главные линии плоскости	34
3.6.	Определение угла наклона плоскости к плоскости проекций	37
3.7.	Взаимное расположение прямой линии и плоскости	39
3.8.	Определение точки пересечения прямой линии с плоскостью	40
3.9.	Прямая линия, перпендикулярная плоскости	40
3.10.	Взаимное расположение двух плоскостей	43
3.11.	Пересекающиеся плоскости	44
3.12.	Взаимно перпендикулярные плоскости	48
4.	ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ	60
4.1.	Сущность метода	60
4.2.1.	Градуирование прямой линии	62
4.2.2.	Взаимное расположение прямых линий	63
4.3.	Плоскость	64
4.3.1.	Проекции и градуирование плоскости	64
4.3.2.	Точка и прямая линия в плоскости	66
4.3.3.	Взаимное расположение плоскостей	67
4.3.4.	Взаимное расположение прямой линии и плоскости	67
4.3.5.	Прямая линия, перпендикулярная плоскости	69
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	76